

SCHAUM'S  
ouTlines

全美经典 学习指导系列

# 电气工程基础

〔美〕 J. J. 卡西 S. A. 纳萨尔 著

阚继泰 译

涵盖全部课程基础

620余道精选习题及其详解

讲授高效的解题方法

考研的得力助手

自学的理想读物



科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

(TN-0336.0101)

责任编辑: 马长芳 王 利

全球销量  
超越 的

SCHAUM'S  
ouTlines

## “全美经典学习指导系列” 是您的最佳 学习伴侣!

40年来最畅销的教辅系列

全美著名高校资深教授倾力之作

国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译

省时高效的学习辅导, 全面详细的习题解答

迄今为止国内最全面的教辅系列

覆盖大学理工科专业

## 全美经典学习指导系列

概率和统计	2000工程力学习题精解	电气工程基础
统计学	工程力学	工程电磁场基础
离散数学	3000物理习题精解	数字信号处理
Mathematica使用指南	流体动力学	数字系统导论
数理金融引论	物理学基础	数字原理
机械振动	材料力学	电机与机电学
微分方程	2000离散数学习题精解	基本电路分析
统计学原理(上)	工程热力学	信号与系统
统计学原理(下)	数值分析	微生物学
微积分	量子力学	生物化学
静力学与材料力学	有机化学习题精解	生物学
有限元分析	3000化学习题精解	分子和细胞生物学
传热学	大学化学习题精解	人体解剖与生理学
近代物理学	电路	

ISBN 7-03-009369-0

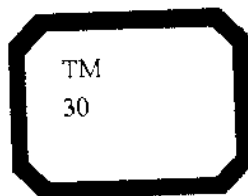


9 787030 093691 >

Mc  
Graw  
Hill

ISBN 7-03-009369-0/TN · 336

定价: 25.00 元



全美经典学习指导系列

# 电气工程基础

[美]J.J. 卡西 S.A. 纳萨尔 著

阙继泰 译

**科学出版社**

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

## 内 容 简 介

本书为全美经典学习指导系列丛书之一。

本书为大学工科基础课教学参考书。全书分为电路元件和电路定律,电阻电路的分析,稳态交流电路,瞬态电路分析,特殊强制函数和拉普拉斯变换,状态变量电路分析,二极管,双极结晶体管,场效应晶体管,运算放大器,开关逻辑和开关电路,数字逻辑应用,变压器,机电学和电机,控制的概念及传递函数,方框图和信号流图,控制判据和响应等17章。每章内容均包括重点分析、例题解答和补充习题。全书共有600多道习题,每道习题都附有详细答案。

本书可作为大专院校电气类、电子信息类、计算机类和其他有关专业学生的辅导教材,也可供有关工程技术人员参考。

Jimnie J. Cathey, Syed A. Nasar: Schaum's Outlines Basic Electrical Engineering, Second Edition

ISBN: 0-07-011355-6

Copyright © 1997, 1984 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill Companies, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版,未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售。

图字:01-2001-1759号

### 图书在版编目(CIP)数据

电气工程基础/[美]卡西(Cathey J.J.),纳萨尔(Nasar S.A.)著;阙继泰译.-北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009369-0

I. 电… II. ①卡…②纳…③阙… III. 电气工程-高等学校-教学参考资料 IV. TM

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 26451 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002年1月第一版 开本:A4(390×1240)

2002年1月第一次印刷 印张:16 1/2

印数:1—5 000 字数:471 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 前 言

在多数院系中，对于不主修电气工程的工科学生，一门电气工程的综述课程是需要的。这个课程将在两学期阶段中讲述无源电网络、电子器件和电路、磁路和电机、线性系统、控制系统、测试仪表——或至少是这些课题的大部分。本书的目的在于为这个综述课程提供示范课本；它也适于用作自修课本。那些希望参加专业工程师考试（电气工程师或其他）的人们，将发现本书更可用作复习指导。

上述全部的电气工程领域，除测试仪表外（缺少有关题目），都已包括在本书中。在每章中仅给出主题的简要复述。着重点放在解答相应的问题上，这里提供了 620 道题目。全部采用 IEEE 标准中制定的国际单位制单位。

著者谨向 Schaum's 概要丛书编辑部在编辑方面的惠助致以谢意。

J.J. 卡西  
S.A. 纳萨尔

# 目 录

<b>第 1 章 电路元件和电路定律</b>	1
1.1 电路的量	1
1.2 电路模型	2
1.3 元件的电压-电流关系	2
1.4 有源元件和无源元件	3
1.5 欧姆定律 基尔霍夫定律	3
1.6 串联电路和并联电路	3
<b>第 2 章 电阻电路的分析</b>	13
2.1 引言	13
2.2 戴维南定理	13
2.3 诺顿定理	13
2.4 叠加定理	13
2.5 网孔分析法	14
2.6 节点分析法	14
2.7 网络简化和电源变换	14
<b>第 3 章 稳态交流电路</b>	23
3.1 正弦输入及其表示法	23
3.2 瞬时值、平均值、方均根值	24
3.3 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 的正弦输入稳态响应	24
3.4 阻抗和串联 $RLC$ 电路	26
3.5 导纳和并联 $RLC$ 电路	27
3.6 交流电路的功率	27
3.7 谐振	28
3.8 三相电路	29
<b>第 4 章 瞬态电路分析</b>	39
4.1 引言	39
4.2 无电源电路的响应	39
4.3 电路的完全响应	39
<b>第 5 章 特殊强制函数和拉普拉斯变换</b>	53
5.1 特殊强制函数	53
5.2 斜坡响应、方脉冲响应、冲激响应	54
5.3 拉普拉斯变换	55
<b>第 6 章 状态变量电路分析</b>	63
6.1 引言	63
6.2 有关的矩阵理论	63
6.3 状态变量定义	67
6.4 向量微分方程解法	68
6.5 一阶电路	69
6.6 高阶电路	69
<b>第 7 章 二极管</b>	79
7.1 引言	79
7.2 半导体二极管的端极特性	79

7.3 对一个理想二极管的电路分析 .....	80
7.4 图解电路分析 .....	81
7.5 非理想二极管的等效电路 .....	83
7.6 整流器应用 .....	85
7.7 波形过滤 .....	86
7.8 限幅作用和箝位作用 .....	88
7.9 齐纳二极管 .....	88
7.10 真空二极管 .....	89
<b>第8章 双极结晶体管</b> .....	<b>103</b>
8.1 双极结晶体管的结构和符号 .....	103
8.2 共基极特性 .....	103
8.3 共发射极特性 .....	104
8.4 电流和放大 .....	105
8.5 恒发射极电流偏置 .....	106
8.6 直流负载线和集电极偏置 .....	107
8.7 电容和交流负载线 .....	108
8.8 放大器分类 .....	109
8.9 混合参数等效电路 .....	109
8.10 放大器的功率和效率 .....	110
<b>第9章 场效应晶体管</b> .....	<b>123</b>
9.1 结型场效应管的结构和符号 .....	123
9.2 结型场效应管的端极特性 .....	124
9.3 偏置线和负载线 .....	124
9.4 结型场效应管放大器的图解分析 .....	127
9.5 结型场效应管的小信号等效电路 .....	127
9.6 MOS 场效应管的结构和符号 .....	127
9.7 MOS 场效应管的端极特性 .....	127
9.8 增强型 MOS 场效应管的偏置 .....	129
<b>第10章 运算放大器</b> .....	<b>137</b>
10.1 引言 .....	137
10.2 理想运算放大器和实际运算放大器 .....	137
10.3 反相放大器 .....	138
10.4 同相放大器 .....	138
10.5 求和放大器 .....	139
10.6 微分放大器 .....	139
10.7 积分放大器 .....	139
10.8 滤波器应用 .....	140
10.9 函数发生器和信号调整器 .....	140
<b>第11章 开关逻辑和开关电路</b> .....	<b>151</b>
11.1 二进制函数 .....	151
11.2 二极管逻辑电路 .....	152
11.3 晶体管开关概念 .....	152
11.4 MOS 场效应管开关概念 .....	153
11.5 触发器 .....	154
<b>第12章 数字逻辑应用</b> .....	<b>162</b>

12.1	布尔代数 .....	162
12.2	逻辑门和逻辑化简 .....	163
12.3	组合逻辑电路 .....	164
<b>第 13 章</b>	<b>变压器 .....</b>	<b>172</b>
13.1	磁路 .....	172
13.2	电感和磁能 .....	173
13.3	变压器工作 .....	173
13.4	电压变换、电流变换、阻抗变换 .....	174
13.5	非理想变压器 .....	174
13.6	等效电路 .....	175
13.7	变压器试验 .....	175
13.8	变压器连接 .....	177
13.9	自耦变压器 .....	178
<b>第 14 章</b>	<b>机电学和电机 .....</b>	<b>188</b>
14.1	基本原理 .....	188
14.2	增量运动系统的力方程和转矩方程 .....	188
14.3	直流电机 .....	190
14.4	三相感应电动机 .....	194
14.5	同步电机 .....	198
<b>第 15 章</b>	<b>控制的概念及传递函数 .....</b>	<b>214</b>
15.1	定义和术语 .....	214
15.2	系统分类 .....	214
15.3	功能方框图 .....	215
15.4	传递函数 .....	216
15.5	热流量关系和液体流量关系 .....	218
<b>第 16 章</b>	<b>方框图和信号流图 .....</b>	<b>226</b>
16.1	方框图公式化 .....	226
16.2	方框图代数 .....	227
16.3	信号流图 .....	229
<b>第 17 章</b>	<b>控制判据和响应 .....</b>	<b>237</b>
17.1	稳定性和特征方程 .....	237
17.2	劳斯-赫尔维茨稳定性判据 .....	238
17.3	一阶系统的响应 .....	239
17.4	二阶系统的响应 .....	241
17.5	稳态误差 .....	242
17.6	灵敏度分析 .....	244



# 第1章 电路元件和电路定律

## 1.1 电路的量

电荷(具体说,电子)在导体中的移动形成了电流。电子的电荷( $Q$ )为  $-1.6 \times 10^{-19}$  库仑(C)。电流( $I$ )以安培(A)计量,安培定义如下:将两根可以忽略截面尺寸的无限长直导线置于真空中,相距 1m,皆保持 1A 电流,则在两导线之间产生  $2 \times 10^{-7}$  N/m 的力。在国际单位制中,电流被定为基本量,而电荷的单位被导出为

$$1\text{C} = 1\text{A} \cdot \text{s}$$

即 1A 电流通过一定截面输送电荷的速率为 1C/s。

两点之间的电压(电位差) $V$  定义为由一点移动单位电荷至另一点所需之功。电位差的单位为伏特(V),

$$1\text{V} = 1\text{N} \cdot \text{m}/\text{C} = 1\text{J}/\text{C}$$

焦耳(J)是功或能量的国际单位制单位。

电源的功率定义为每单位时间供出的能。于是,电能  $U$  由

$$U = QV(\text{J}) \quad (1.1)$$

得出,电功率  $P$  由

$$P = \frac{dU}{dt} = V \frac{dQ}{dt} = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R(\text{W}) \quad (1.2)$$

得出,瓦特(W)就是 1J/s。由式(1.2), $1\text{V} = 1\text{W}/\text{A}$ 。其实,这就是国际单位制中对伏特的正式定义。

表 1-1 摘录了多种电学量的单位和量纲( $M$ ≡质量, $L$ ≡长度, $T$ ≡时间, $A$ ≡电流)。在实际工作中,经常要使用国际单位制单位的十进制倍数或十进制约数;表 1-2 列出了怎样在单位的符号之前冠以字母词头来表示这些倍数或约数。

表 1-1

量	符号	量纲	国际单位制单位
电荷	$Q$	$[A][T]$	库仑, C
电位差	$V$	$[M][A]^{-1}[L]^2[T]^{-3}$	伏特, V
电流	$I$	$[A]$	安培, A
电场强度	$E$	$[M][A]^{-1}[L][T]^{-3}$	伏特/米, V/m
电通密度	$D$	$[A][L]^{-2}[T]$	库仑/米 <sup>2</sup> , C/m <sup>2</sup>
介电常量	$\epsilon$	$[M]^{-1}[A]^2[L]^{-3}[T]^4$	法拉/米, F/m
电阻	$R$	$[M][A]^{-2}[L]^2[T]^{-3}$	欧姆, $\Omega$
电容	$C$	$[M]^{-1}[A]^2[L]^{-2}[T]^4$	法拉, F
电导率	$\sigma$	$[M]^{-1}[A]^2[L]^{-3}[T]^3$	西门子/米, S/m

表 1-2

倍增因数	字母词头	倍增因数	字母词头
$10^{18}$	E(艾)	$10^{-1}$	d(分)
$10^{15}$	P(拍)	$10^{-2}$	c(厘)
$10^{12}$	T(太)	$10^{-3}$	m(毫)
$10^9$	G(吉)	$10^{-6}$	$\mu$ (微)
$10^6$	M(兆)	$10^{-9}$	n(纳)
$10^3$	k(千)	$10^{-12}$	p(皮)
		$10^{-15}$	f(飞)
		$10^{-18}$	a(阿)

## 1.2 电路模型

为使电流在其中流通,电路要由多个电路元件的互连来构成。基本的电路元件为:电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$ 、电压源  $v$ 、电流源  $i$ 。将它们用符号示于图 1-1 中。

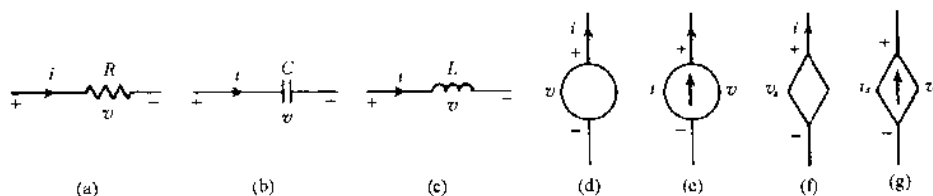


图 1-1

为了构成电路或网络,一种综合结构的电路元件互连如图 1-2 所示。注意到,每个元件都有两个端点;两个或多个元件的连接处称为节点。将一个元件连同它的引线看成电路的一条支路。电路的回路是由节点与支路交替的一条简单闭合路径;一个回路可以将网孔(不包围其他回路的回路)包围在内,如图 1-2 中含有电流  $i_3$  的回路。

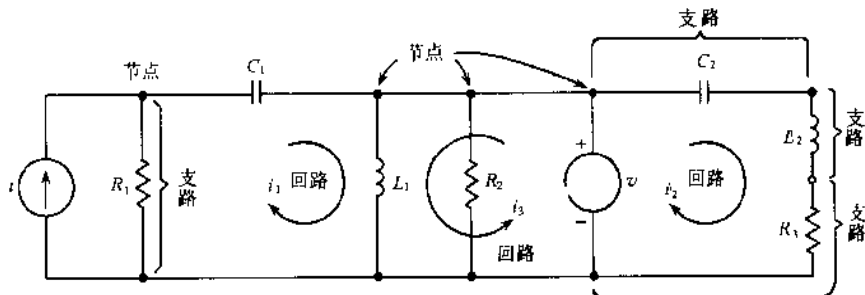


图 1-2

## 1.3 元件的电压-电流关系

对于电阻  $R$  (见图 1-1(a)), 电压-电流关系由欧姆定律给出为

$$v = Ri \quad \text{或} \quad i = Gv \quad (1.3)$$

这里  $G \equiv 1/R$  是电导,以西门子(S)计量。

电容  $C$  (见图 1-1(b)) 定义为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{q}{v} \quad (1.4)$$

在式(1.4)中,  $q$  和  $v$  分别表示时变电荷和时变电压,反之  $Q$  和  $V$  是时不变的(直流)量。由 1.1 节,用电流  $i$  的定义可写出

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.5)$$

由方程(1.4)和(1.5)得出电容的电压-电流关系为

$$v = \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{或} \quad i = C \frac{dv}{dt} \quad (1.6)$$

第三种电路元件称为电感(见图 1-1(c)), 其电压-电流关系为

$$v = L \frac{di}{dt} \quad \text{或} \quad i = \frac{1}{L} \int v dt \quad (1.7)$$

电感的单位是亨利(H)。

### 1.4 有源元件和无源元件

理想电压源(见图 1-1(d)),具有与通过电源电流  $i$  无关的端电压  $v$ 。类似地,理想电流源(见图 1-1(e))的电流  $i$  与它两端之间的电压  $v$  无关。相对照,在相关(或受控)电压源(见图 1-1(f))中,电源两端的电压取决于网络中另一个元件两端的电压。同样,相关(或受控)电流源中的电流(见图 1-1(g)),取决于通过网络中另一个元件的电流。

将电压源和电流源称为有源元件;它们能向两络供出能量。另一方面,电阻、电容、电感是无源元件。

### 1.5 欧姆定律 基尔霍夫定律

欧姆定律在式(1.3)前已论述过了。很明显由式(1.3),设  $i=0$  但  $v \neq 0$ , 则  $R = \infty$ , 这种情况为开路。另一方面,设  $v=0$  但  $i \neq 0$ , 则  $R=0$ , 意味着短路。

基尔霍夫电压定律(KVL)写出为:电路中环绕任一回路的电压代数和为零。用数学形式表达为

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0 \quad (1.8)$$

这里,  $n$  是电压的个数。在应用式(1.8)时,必须与统计的各个电压正负符号相符合(参看题 1.15 和 1.16)。

基尔霍夫电流定律(KCL)指明,电路中任一节点的全部进入电流代数和为零,或全部离去电流代数和为零,即

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0 \quad (1.9)$$

这里,  $m$  是所研究的节点上电流的个数。在应用式(1.9)时,必须与指定的电流流向相符合(参看题 1.17)。

### 1.6 串联电路和并联电路

如果两个或多个电路元件传导同一电流(而不仅是等电流),就称它们为串联连接。另一方面,如果它们跨接于同一电压之间,就称这些元件为并联连接。

如果将  $n$  个电阻串联连接,可以证明(参看题 1.18)其等效电阻  $R_{\infty}$  为

$$R_{\infty} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (1.10)$$

对于  $n$  个电阻并联,

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (1.11)$$

这里  $R_{\text{eq}}$  是并联组合的等效电阻(参看题 1.19)。对于  $n=2$  的特殊情况,式(1.11)化为

$$R_{\text{eq}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

假如串联电路中的电压、电流、电阻能够分别变换为并联电路中的电流、电压、电导,于是串联电路的 KVL 方程就转化为并联电路的 KCL 方程,这时就将某个电路称为是另一个电路的对偶(参看题 1.20 和 1.21)。

在电路分析中,串联电路的电压分配概念经常是很有用的。如果式(1.10)中有电压  $v$  接于串联电阻组合两端,则  $R_k$  的端电压为

$$v_k = \frac{R_k}{R_{\infty}} v \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.12)$$

同样,如果式(1.11)中有电流  $i$  进入并联电阻组合,则  $R_k$  中的电流分配法则为

$$i_k = \textcircled{D} \frac{R_{\Sigma}}{R_k} i = \frac{\Pi_k}{\Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_n} i \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \quad (1.13)$$

这里  $\Pi_k$  是全部电阻剔除  $R_k$  后的连乘积。

### 例题解答

- 1.1 电导率和这里的电阻是温度的慢变函数。温度为  $T(^{\circ}\text{C})$  时的电阻  $R_T$  与  $0^{\circ}\text{C}$  时的电阻  $R_0$  之间关系较好地近似为

$$R_T = R_0(1 + \alpha T)$$

这里,  $\alpha$  是熟知的材料电阻温度系数。假如某线圈在  $20^{\circ}\text{C}$  时电阻为  $4.0\Omega$ ,  $80^{\circ}\text{C}$  时为  $4.52\Omega$ , 试计算: (a) 材料电阻温度系数; (b) 此线圈在  $100^{\circ}\text{C}$  时的电阻。

$$\begin{aligned} \text{解: (a)} \quad R_{20} &= R_0(1 + 20\alpha) = 4.0\Omega \\ R_{80} &= R_0(1 + 80\alpha) = 4.52\Omega \end{aligned}$$

联立解,  $\alpha = 2.27 \times 10^{-3}^{\circ}\text{C}^{-1}$  和  $R_0 = 3.83\Omega$ 。

$$\text{(b)} \quad R_{100} = (3.83)[1 + 100(2.27 \times 10^{-3})] = 4.69\Omega$$

- 1.2 阻值为  $5\Omega$ 、 $7\Omega$ 、 $8\Omega$  的三个电阻, 串联连接外加  $100\text{V}$  电源, 试求通过的电流和各个端电压。

$$\text{解: 总电阻} = R_{\Sigma} = 5 + 7 + 8 = 20\Omega$$

$$\text{电路电流} = I = \frac{V}{R_{\Sigma}} = \frac{100}{20} = 5\text{A}$$

$$5\Omega \text{ 端电压} = 5I = 25\text{V}$$

$$7\Omega \text{ 端电压} = 7I = 35\text{V}$$

$$8\Omega \text{ 端电压} = 8I = 40\text{V}$$

- 1.3 (a)  $5\Omega$ 、 $10\Omega$ 、 $20\Omega$  的三个电阻, 全并联连接外加  $100\text{V}$  电源, 试求端电压和各个通过电流。  
(b) 求出从电源吸收的电流和功率。

解: (a) 每个电阻皆有端电压  $100\text{V}$ ,

$$5\Omega \text{ 通过电流} = \frac{100}{5} = 20\text{A}$$

$$10\Omega \text{ 通过电流} = \frac{100}{10} = 10\text{A}$$

$$20\Omega \text{ 通过电流} = \frac{100}{20} = 5\text{A}$$

$$\text{(b) 出自电源的总电流} = 20 + 10 + 5 = 35\text{A}$$

$$\text{电源输出功率} = VI = 100 \times 35 = 3500\text{W}$$

- 1.4 将图 1-3 中端点  $a$  和  $b$  之间的电路简化为单一电阻。

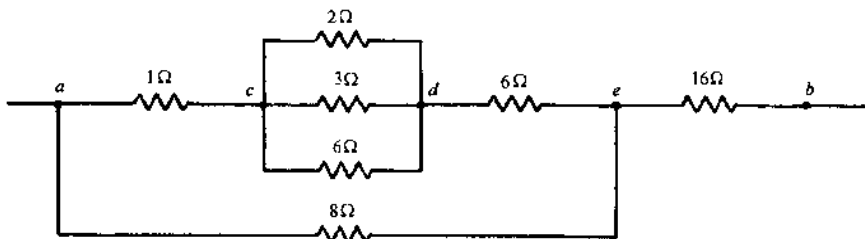


图 1-3

① 原著中无此等号。——译者注

**解** 由并联电阻法则,

$$\frac{1}{R_{cd}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{或} \quad R_{cd} = 1\Omega$$

$a$  和  $e$  之间的串联电阻为  $1+1+6=8(\Omega)$ , 得实际的电阻

$$R_{ae} = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = 4(\Omega)$$

最后,  $R_{ab} = 4 + 16 = 20(\Omega)$ 。

**1.5** 试求 110V 额定 25W、60W、75W、100W 灯泡的电阻。

**解** 由  $P = V^2/R$ , 有

$$R_{25W} = \frac{(110)^2}{25} = 484\Omega, \quad R_{75W} = \frac{(110)^2}{75} = 161.3\Omega$$

$$R_{60W} = \frac{(110)^2}{60} = 201.67\Omega, \quad R_{100W} = \frac{(110)^2}{100} = 121\Omega$$

**1.6** 一个额定 110V、55W 的电热垫准备用在 220V 电源上。打算将额定 110V 灯泡的串并联组合与电热垫串联连接; 灯泡是额定 20W、60W、75W、100W 的现有物品。请找到一种垫-灯组合的可能方案。经此改装的垫将以何种速率产生热?

**解** 由题 1.5 知道了各种灯泡的电阻。电热垫的电阻为

$$R_p = \frac{(110)^2}{55} = 220\Omega$$

必须组合这些灯泡以得到 220Ω 的总电阻; 依照电压分配, 电热垫电压将是所需的 110V。一种可能是用两个 60W 灯泡的并联组合与一个 100W 灯泡串联:

$$R_b = R_{100} + \frac{1}{2}R_{60} = 121 + \frac{1}{2}(201.67) = 221.83\Omega$$

此值处于安全一侧, 于是

$$R_p + R_b = 220 + 221.83 = 441.83\Omega, \quad I_p = \frac{220}{441.83} = 0.498A$$

电热垫的热输出为  $I_p^2 R_p = (0.498)^2 (220) = 54.54W$ 。

**1.7** 将阻值 5Ω、10Ω、15Ω、20Ω 的四个电阻串联连接, 在组合的两端加 100V 电源。各电阻中的电压分配是怎样的?

**解** 用电压分配法则, 得到

$$V_5 = \left( \frac{5}{5 + 10 + 15 + 20} \right) (100V) = 10V$$

类此,  $V_{10} = 20V$ ,  $V_{15} = 30V$ ,  $V_{20} = 40V$ 。

**1.8** 列出公式表明并联连接的三个电阻  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  中的电流分配法则。总输入电流为  $i$ 。

**解** 电阻两端的公共电压为  $V = iR_{eq}$ , 这里

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

由此,

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_{eq}}{R_1} i, \quad i_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} i, \quad i_3 = \frac{R_{eq}}{R_3} i$$

**1.9** 两个由不同材料制成具有电阻温度系数  $\alpha_1 = 0.004^\circ\text{C}^{-1}$  和  $\alpha_2 = 0.005^\circ\text{C}^{-1}$  的电阻, 并联连接且在  $10^\circ\text{C}$  时消耗相等功率。在  $60^\circ\text{C}$  时,  $R_2$  与  $R_1$  中功率消耗之比是多少?

**解** 在  $10^\circ\text{C}$  时  $R_1 = R_2$ , 这意味着

$$R_{01}(1 + 10\alpha_1) = R_{02}(1 + 10\alpha_2) \quad \text{或} \quad \frac{R_{01}}{R_{02}} = \frac{1 + 10\alpha_2}{1 + 10\alpha_1} \quad (1)$$

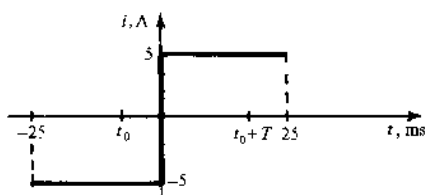
得到在  $60^\circ\text{C}$  时功率之比为

$$\frac{V^2/R_2}{V^2/R_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{01}(1 + 60\alpha_1)}{R_{02}(1 + 60\alpha_2)} = \frac{(1 + 10\alpha_2)(1 + 60\alpha_1)}{(1 + 10\alpha_1)(1 + 60\alpha_2)}$$

代入  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的数值, 得出比值 0.963。

**1.10** 一个 50mH 的电感传导每 25ms 倒向一次的 5A 电流。由于这种电流倒向, 电感在 25ms

时间间隔中①感应的平均电压是多少?



在倒向瞬间感应电压  $v$  是无限大,除此瞬间之外感应电压  $v$  是零。在间隔  $T = 25\text{ms}$  中,总是有(见图)

$$i(t_0 + T) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0 + T} v dt = \frac{T}{L} v_{\text{avg}}$$

$$\text{或 } v_{\text{avg}} = L \frac{i(t_0 + T) - i(t_0)}{T}$$

$$= (50 \times 10^{-3}) \frac{5 - (-5)}{25 \times 10^{-3}} = 20(\text{V})$$

1.11 如果电感线圈电流如图 1-4(a)所示,试绘出电感线圈端电压的图象。

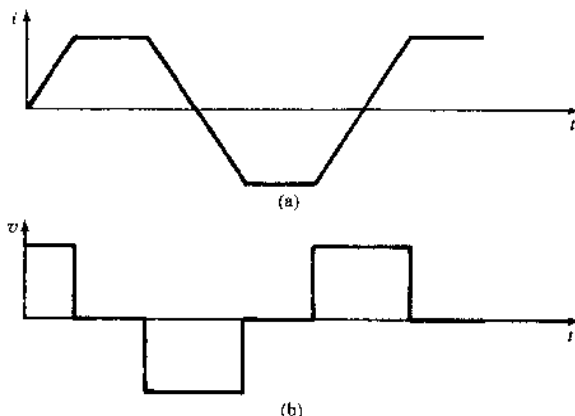


图 1-4

$v = L(di/dt)$ ; 见图 1-4(b)。

1.12 (a) 电感  $L_1$  和  $L_2$  串联连接,试求等效电感。(b) 如将两个电感并联连接,等效电感是什么? 将(a)和(b)推广到  $n$  个电感的情形。

(a) 对于有公共电流  $i$  的串联电路,有

$$v = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt} = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \quad \text{由此, } L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$$

普遍地,

$$n \text{ 个电感串联 } L_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^n L_k$$

(b) 对于并联电路,设公共电压为  $v$ ,有

$$i = \frac{1}{L_{\text{eq}}} \int v dt = i_1 + i_2$$

$$= \frac{1}{L_1} \int v dt + \frac{1}{L_2} \int v dt \quad \text{由此, } \frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

普遍地,

$$n \text{ 个电感并联 } \frac{1}{L_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

1.13 求出两个电容  $C_1$  和  $C_2$  在(a)串联连接时的等效电容和(b)并联连接时的等效电容。将(a)和(b)推广到  $n$  个电容的情形。

$$(a) \quad v = \frac{1}{C_{\text{eq}}} \int i dt = v_1 + v_2 = \frac{1}{C_1} \int i dt + \frac{1}{C_2} \int i dt \quad \text{由此, } \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$n \text{ 个电容串联 } \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

① 原著中无“在 25ms 时间间隔中”。——译者注

$$(b) \quad i = C_{\infty} \frac{dv}{dt} = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} \quad \text{由此, } C_{\infty} = C_1 + C_2$$

$$n \text{ 个电容并联 } C_{\infty} = \sum_{k=1}^n C_k$$

- 1.14 一个  $40\mu\text{F}$  电容充电至贮存  $0.2\text{J}$  能量,然后将未充电的  $60\mu\text{F}$  电容用理想导线与前者并联连接。这个系统的最终贮能是多少?

根据式(1.2)并用式(1.6),得到电容贮存的能量为

$$U = \int u dt = \int v \left( C \frac{dv}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} C v^2 \quad (1)$$

将式(1.4)用于式(1)中得贮能为

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (2)$$

由式(2)求出  $40\mu\text{F}$  电容上的初始电荷,于是

$$0.2 = \frac{Q^2}{2(40 \times 10^{-6})} \quad \text{或 } Q = 4 \times 10^{-3} \text{C}$$

电容并联连接后,公共电压  $V$  由

$$V = \frac{\text{总 } Q}{\text{总 } C} = \frac{4 \times 10^{-3}}{(40 + 60)10^{-6}} = 40(\text{V})$$

得出。因而,

$$40\mu\text{F} \text{ 电容最终贮能} = \frac{1}{2} (40 \times 10^{-6}) (40)^2 = 0.032\text{J}$$

$$60\mu\text{F} \text{ 电容最终贮能} = \frac{1}{2} (60 \times 10^{-6}) (40)^2 = 0.048\text{J}$$

$$\text{最终总贮能} = 0.032 + 0.048 = 0.08\text{J}$$

能量损耗为  $0.2 - 0.08 = 0.12\text{J}$ , 表明电荷在两个电容之间迁移时做了功。

- 1.15 应用基尔霍夫电压定律(1.8)到图 1-5 中所示电路上。

任意选择电流  $I$  的方向如图 1-5 中所示。对于每个电阻的端电压指定了一种极性;很明显,如果  $I$  流入电阻的正端,则将欧姆定律取为  $V = IR$ , 反之则取为  $V = -IR$ 。将 KVL 应用于图 1-5, 导出

$$V_1 + V_2 + V_3 - V = 0$$

这里  $V_1 = IR_1$ ,  $V_2 = IR_2$ ,  $V_3 = IR_3$ 。

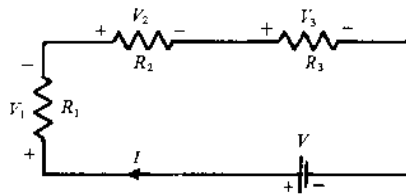


图 1-5

- 1.16 试对图 1-6 网络中指定的两个回路写出基尔霍夫电压定律方程。假定极性如所标明。还要用  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $R_2$  表示出  $V_2$ 。

$$\text{回路 1: } -V_a + V_1 + V_2 + V_b = 0$$

$$\text{回路 2: } -V_b - V_2 + V_3 + V_4 + V_r = 0$$

$$R_2 \text{ 端电压: } V_2 = (I_1 - I_2)R_2$$

- 1.17 网络的一个节点如图 1-7 所示,已表示了电流的流向。试求  $I$  的量值和方向。

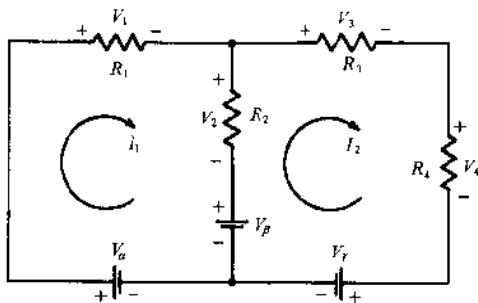


图 1-6①

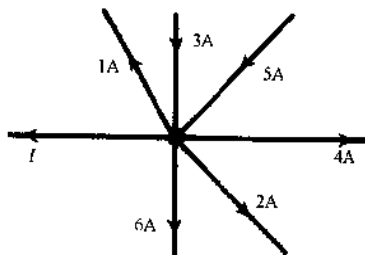


图 1-7

① 原著图中无左侧的连线。——译者注

对  $I$  假设一个指定方向, 于是由式(1.9)得到

$$-I - 1 + 3 + 5 - 4 - 2 - 6 = 0$$

由此  $I = -5\text{A}$ , 就是  $5\text{A}$  进入节点。

**1.18** 对于由  $n$  个电阻  $R_1, R_2, \dots, R_n$  串联连接构成的等效电阻, 试导出其表达式。

令  $V$  为串联电路组合两端的电压,  $I$  为通过它的电流,  $R_{\text{eq}}$  为等效电阻。于是, 由欧姆定律, 得

$$V = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR_{\text{eq}} \quad \text{由此, } R_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^n R_k$$

**1.19** 电阻  $R_1, R_2, \dots, R_n$  并联连接, 试求出等效电阻的表达式。

令  $I$  为进入并联组合的总电流,  $V$  为它的端电压,  $R_{\text{eq}}$  为等效电阻。于是, 由 KCL,

$$I = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right) = \frac{V}{R_{\text{eq}}} \quad \text{或} \quad \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

**1.20** 将  $R_1, R_2, R_3$  三个电阻与电压源  $V$  串联连接, 试绘制对偶网络。

此网络示于图 1-8(a) 中。按 1.6 节, 用并联元件替换串联元件, 绘出对偶网络图 1-8(b)。两个网络的方程为

$$(a) \quad V = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

$$(b) \quad I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = VG_1 + VG_2 + VG_3$$

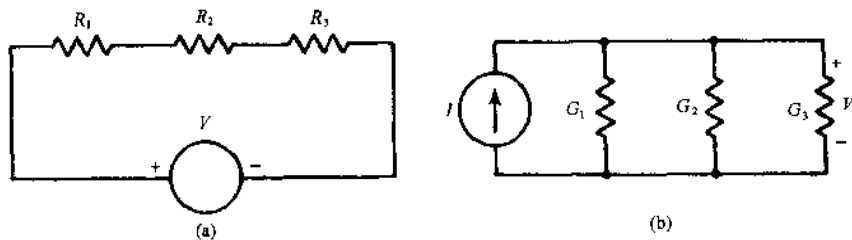


图 1-8

**1.21** 两网孔的网络如图 1-9(a) 所示。试拟构其对偶网络。

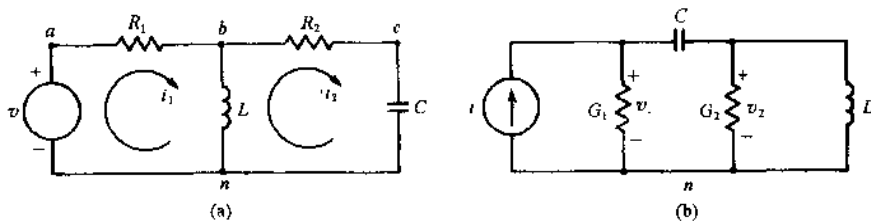


图 1-9

网络方程为

$$R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt + L \frac{di_2}{dt} - L \frac{di_1}{dt} = 0$$

再来构思对偶, 用两个电压  $v_1$  和  $v_2$  替换上面方程组中的  $i_1$  和  $i_2$ , 并用  $i$  替换  $v$ , 得

$$R_1 v_1 + L \frac{dv_1}{dt} - L \frac{dv_2}{dt} = i$$

$$R_2 v_2 + \frac{1}{C} \int v_2 dt + L \frac{dv_2}{dt} - L \frac{dv_1}{dt} = 0$$

现在, 如果用电导替换电阻并将电感与电容互换, 就得到了

$$G_1 v_1 + C \frac{dv_1}{dt} - C \frac{dv_2}{dt} = i$$



$$G_2 v_2 + \frac{1}{L} \int v_2 dt + C \frac{dv_2}{dt} - C \frac{dv_1}{dt} = 0$$

最后的方程组由图 1-9(b) 电路即对偶网络模拟出来。

- 1.22  $R_1 = 15\Omega$  和  $R_2 = 25\Omega$  两个电阻并联连接且由  $I = 5A$  的电流源供电。试求出每个电阻消耗的功率。

由式(1.13), 用  $n=2$ , 有

$$P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{R_1 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} I^2 = \frac{(15)(25)^2}{(40)^2} (5)^2 = 146.5(W)$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = \frac{R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} I^2 = \frac{(15)^2 (25)}{(40)^2} (5)^2 = 87.9(W)$$

- 1.23 一个桥式电路如图 1-10 中所示。用标明的电流, (a) 写出四个节点上的基尔霍夫电流定律; (b) 写出环绕回路  $abda$ 、 $bcd b$ 、 $adca$  的基尔霍夫电压定律。

(a) 节点  $a$ :  $I = i_1 + i_3$   
 节点  $b$ :  $i_1 = i_2 + i_5$   
 节点  $c$ :  $i_2 = I + i_4$   
 节点  $d$ :  $0 = i_3 + i_4 + i_5$

(b) 回路  $abda$ :  $i_1 R_1 + i_5 R_5 = i_3 R_3$   
 回路  $bcd b$ :  $i_5 R_5 = i_2 R_2 + i_4 R_4$   
 回路  $adca$ :  $i_3 R_3 - i_4 R_4 = E$

- 1.24 对于题 1.23 电路, 研究平衡电桥 ( $i_5 = 0$ ) 的特殊情况。(a) 若  $R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$ ,  $R_3 = 30\Omega$ , 求  $R_4$ 。(b) 若  $E = 45V$ , 计算电池输出的电流。

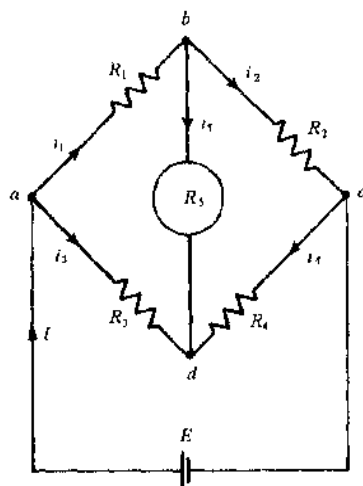


图 1-10

(a) 由于  $i_5 = 0$ , 得  $i_1 = i_2$  和  $i_3 = -i_4$ ; 又节点  $b$  和  $d$  为同电位, 于是

$$i_1 R_1 = i_3 R_3 \quad (1)$$

$$i_2 R_2 = i_1 R_2 = -i_4 R_4 = i_3 R_4 \quad (2)$$

由(1)和(2)得到

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \text{ 或 } R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{20 \times 30}{10} = 60\Omega$$

(b) 跨接在电池上的等效电阻  $R_e$  成为

$$R_e = \frac{(10 + 20)(30 + 60)}{10 + 20 + 30 + 60} = 22.5\Omega$$

$$\text{得 } I = \frac{E}{R_e} = \frac{45}{22.5} = 2.0A$$

- 1.25 试求图 1-11 所示网络中的电流  $i_x$  和  $i_y$ 。

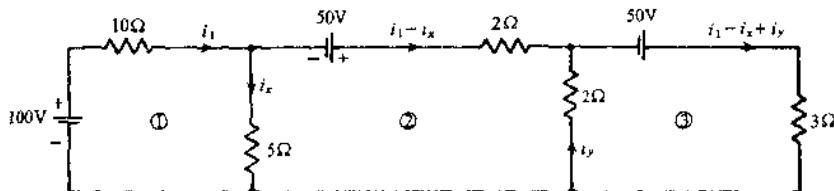


图 1-11

其余支路的电流也依据 KCL 标示在图 1-11 中。将 KVL 用于网孔 1、2、3:

$$100 = 10i_1 + 5i_x$$

$$50 = 2(i_1 - i_r) - 2i_3 + 5i_r$$

$$50 = 3(i_1 - i_r + i_3) + 2i_3$$

解联立方程得到  $i_r = -3.88\text{A}$ ,  $i_v = 0.51\text{A}$ 。  $i_r$  中的负号表示真实电流的方向与图 1-11 中所给出的相反。

- 1.26 这个题涉及电源变换的概念。用图 1-12(b)中的电流源  $i$  和(并联)内阻  $R_i$  替换图 1-2(a)中的电压源  $v$  和(串联)内阻  $R_v$ , 这样能够使通过  $R$  的电流保持不变。

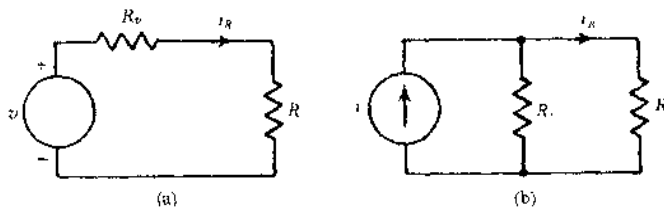


图 1-12

由图 1-12(a),

$$i_R = \frac{v}{R_v + R}$$

再由图 1-12(b),

$$i_R = \frac{iR_i}{R_i + R}$$

然后, 为了

$$\frac{v}{R_v + R} = \frac{iR_i}{R_i + R}$$

如果取  $i = v/R_v$  和  $R_i = R_v$ , 此式的等值性便可成立。

- 1.27 试求图 1-13(a)中  $2\Omega$  电阻的电流和它的端电压。

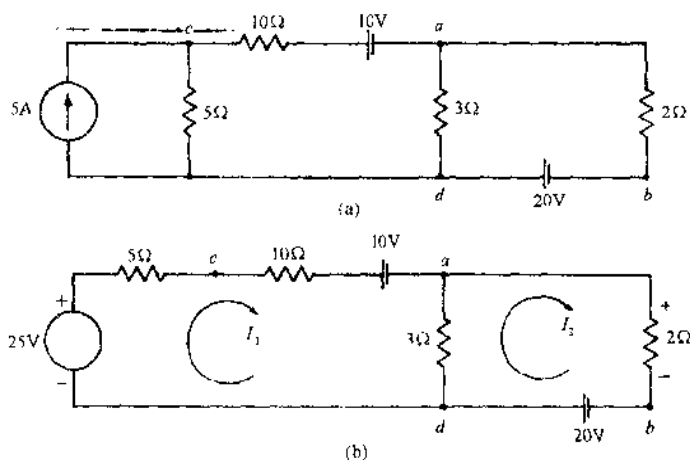


图 1-13

利用题 1.26 的结果, 将 5A 电流源变换为电压源; 这个电路变成如图 1-13(b)所示。对两个网孔, KVL 给出

$$25 - 15I_1 - 10 + 3I_2 - 3I_1 = 0$$

$$20 - 3I_2 + 3I_1 - 2I_2 = 0$$

由此解得  $I_2 = 5\text{A}$  和  $V_{ab} = 5 \times 2 = 10\text{V}$ 。

### 补充习题

- 1.28 (a)  $1000\text{W}/110\text{V}$  电阻器的阻值是多少? (b) 求出这个电阻器的额定电流。

答 (a)  $12.1\Omega$ ; (b)  $9.09\text{A}$

- 1.29 导线在  $20^\circ\text{C}$  时的电阻为  $5.4\Omega$ , 且在  $100^\circ\text{C}$  时为  $7.0\Omega$ 。求出 (a) 在  $0^\circ\text{C}$  时的电阻, (b) 当电阻为  $6.0\Omega$  时的温度。假定电阻与温度呈线性变化关系。

答 (a)  $5.0\Omega$ ; (b)  $50^\circ\text{C}$

- 1.30 铜和铂的电阻温度系数分别为  $0.00427^\circ\text{C}^{-1}$  和  $0.00357^\circ\text{C}^{-1}$ 。铜制和铂制电阻器在  $20^\circ\text{C}$  时的电阻分别为  $17\Omega$  和  $18\Omega$ 。试计算当两个电阻相等时的温度。

答  $165.4^\circ\text{C}$

- 1.31 某线圈的电阻在  $20^\circ\text{C}$  时为  $4.0\Omega$  且在  $80^\circ\text{C}$  时为  $4.25\Omega$ 。在什么温度时的电阻为  $4.67\Omega$ ? 假定是恒定的电阻温度系数。

答  $180.8^\circ\text{C}$

- 1.32 计算出题 1.3 的三个电阻中每一个的消耗功率, 并由此检验题 1.3(b) 的结果。

答  $2000\text{W}$ ,  $1000\text{W}$ ,  $500\text{W}$

- 1.33 如果在题 1.4 电路上跨接  $200\text{V}$  电源, 求 (a)  $8\Omega$  电阻的端电压, (b)  $1\Omega$  电阻中的消耗功率。

答 (a)  $40\text{V}$ ; (b)  $25\text{W}$

- 1.34 求出在  $60^\circ\text{C}$  时题 1.9 中电阻的电流比值  $I_1/I_2$ 。

答  $1.0384$

- 1.35 电池具有内阻  $R_i$  和端电压  $V_i$ 。试证明向电阻性负载提供的功率不能超过  $V_i^2/2R_i$ 。

- 1.36 设题 1.35 的电池有  $V_i = 96\text{V}$  和  $R_i = 50\text{m}\Omega$ 。将  $150$ 、 $100$ 、 $50$ 、 $30$ 、 $20\text{m}\Omega$  的离散负载逐一地与电池跨接。绘制提供给负载的功率与负载阻值之间的关系曲线, 然后验证最大功率传递发生在  $R_L = R_i = 50\text{m}\Omega$  时。

- 1.37 将  $L_1 = 30\text{mH}$  和  $L_2 = 60\text{mH}$  两个电感并联连接, 再将这个组合与  $L_3 = 10\text{mH}$  电感串联连接。试求等效电感。

答  $30\text{mH}$

- 1.38 在图 1-14 所示电容系统的端点  $a$  与  $b$  之间的等效电容是多少?

答  $14\text{C}$

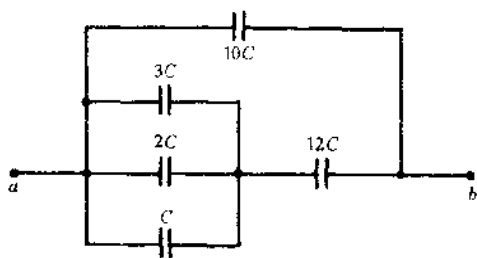


图 1-14

- 1.39  $40\mu\text{F}$  电容与  $60\mu\text{F}$  电容并联连接, 再跨接在一个时变电压源上。某一瞬间电源输出的总电流为  $10\text{A}$ , 试求通过单个电容的瞬时电流。

答  $i_{40\mu\text{F}} = 4\text{A}$ ,  $i_{60\mu\text{F}} = 6\text{A}$

- 1.40 将  $50\mu\text{F}$  电容充电到  $300\mu\text{C}$ , 然后将未充电的  $100\mu\text{F}$  电容与前一电容并联连接。试计算转移到  $100\mu\text{F}$  电容上的电荷。

答  $200\mu\text{C}$

- 1.41 一个长方体铜块的尺寸为  $2.54\text{cm} \times 5.08\text{cm} \times 7.62\text{cm}$ 。设铜的电导率为  $58\text{MS/m}$ , 试计算各对平行面之间的电阻。

答  $0.113\mu\Omega$ ,  $0.452\mu\Omega$ ,  $1.018\mu\Omega$

- 1.42  $3\Omega$  电阻传导如图 1-15 所示波形的电流。试计算电阻中的平均消耗功率。

答  $100\text{W}$

- 1.43 非线性电路元件的  $v-i$  特性和它的线性近似(虚线)如图 1-16(a)所示。如果它工作在 (a)  $10\text{V}$ , (b)  $30\text{V}$ , 试利用电阻和电压源来实现这个元件的等效电路。

答 (a) 见图 1-16(b); (b) 见图 1-16(c)

- 1.44 图 1-17 表示一个三线直流系统。试由已知参数计算 (a)  $10\Omega$  电阻的端电压, (b) 通过它的电流。

答 (a)  $158\text{V}$ ; (b)  $15.8\text{A}$

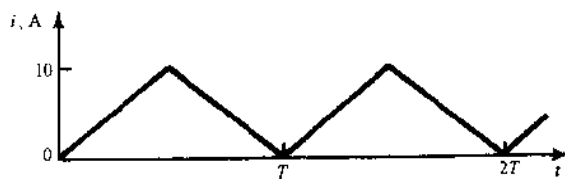


图 1-15

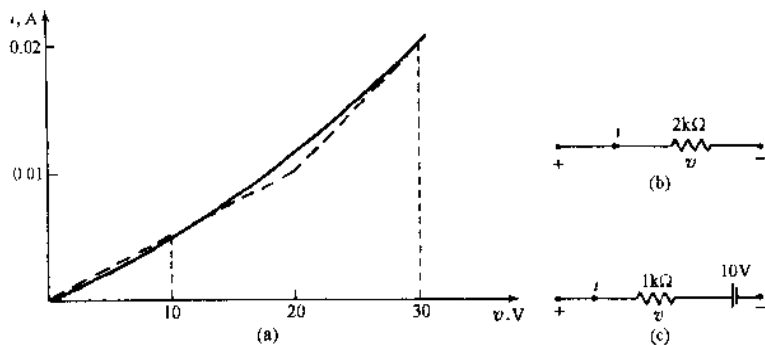


图 1-16

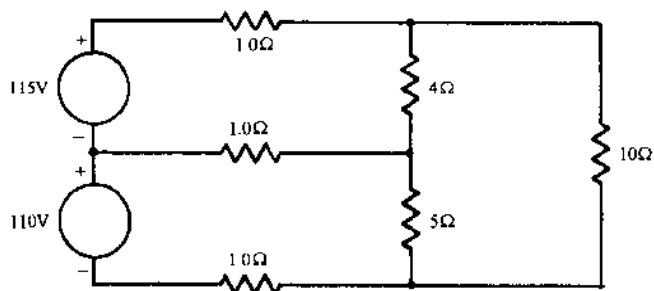


图 1-17

1.45 对于图 1-13(a)所示的电路,试求出由(a)5A 电流源, (b)10V 电池, (c)20V 电池,向网络供出的功率。

答 (a)83.33W; (b) -16.7W; (c)100W

1.46 请比照题 1.26,证明图 1-12 的两个电路是对偶的。

1.47 求出图 1-13(a)网络的对偶。

答 见图 1-18

1.48 计算图 1-18 网络的全部电阻消耗的总功率。

答 1131W

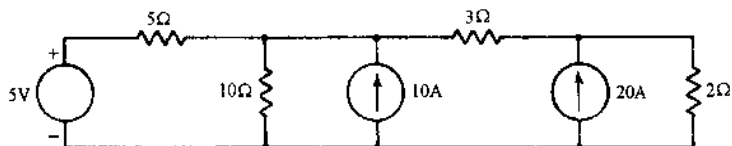


图 1-18

### 2.1 引言

本章将论述关于电阻电路的一些法则、定理、方法(不一定相互无关)。与欧姆定律、KVL、KCL一起,这些技术同样适于含电感和电容的交流电路,并且在频域中有效(第3章)。

### 2.2 戴维南定理

戴维南定理可以表述如下:在图 2-1(a)中的端点 1、2 处,含电阻和电源的任意线性网络 A,可以用电压源  $V_{th}$  与电阻  $R_{th}$  串联构成的等效电路进行替换。

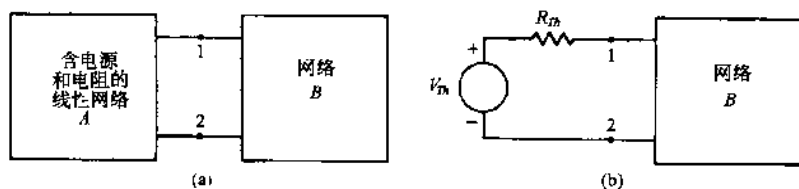


图 2-1 戴维南等效电路

电压  $V_{th}$  为 1、2 之间的开路电压,  $R_{th}$  为开路电压与短路电流之比。另一种方法,  $R_{th}$  为消除全部独立电源之后在端点 1、2 处的等效电阻。图 2-1(a)表示任意网络,它的戴维南等效电路示于图 2-1(b)。

戴维南定理在网络简化,特别在求出通过网络中指定支路的电流时,是很有用的。

### 2.3 诺顿定理

诺顿等效电路是戴维南等效电路的对偶,并且可由后者经电源变换(题 1.26)求得。诺顿定理可以表述如下:在图 2-2(a)中的端点 1、2 处,含电阻和电源的任意线性网络 A,可以用电流源  $I_N$  与电导  $G_N$  并联构成的等效电路进行替换,如图 2-2(b)所示。

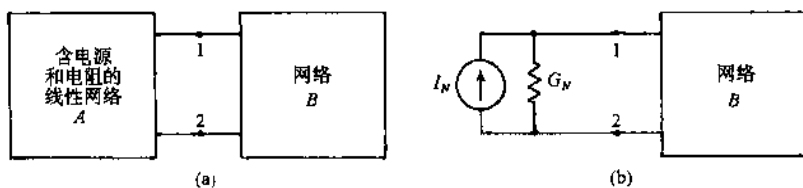


图 2-2 诺顿等效电路

电流  $I_N$  为短路电流(当端点 1、2 短路时通过它们的电流),  $G_N$  为短路电流与开路电压之比。注意到  $G_N = 1/R_{th}$ , 这里  $R_{th}$  为戴维南等效电阻。

### 2.4 叠加定理

叠加定理表述:对于含电压源和(或)电流源的线性电阻电路,通过任一元件的电流(或端电压)可以用归因于每个独立源单独作用下的单个电流(或电压)取代数相加而得。不作用的独立电压源用它们的内阻(或理想电压源用短路)进行替换,不作用的独立电流源用它们的内电导(或理想电流源用开路)进行替换。

## 2.5 网孔分析法

在没有明确定义它之前,例如在题 1.27 中,我们已经用过网孔分析法。首先来定义展平或平面网络:它能够显示为平面上的图形(图)而没有两条支路相交叉。平面网络的任一回路将有内部和外部之分:网孔就是在其内部没有回路的一种回路(如果将图看成地图,网孔就像是“地区”的边界)。网孔分析法就是将 KVL(1.8)用于平面网络的网孔而成;KCL(1.9)将隐含地满足。

**例 2.1** 用网孔分析法求解图 2-3 网络的  $2\Omega$  电阻中的电流。

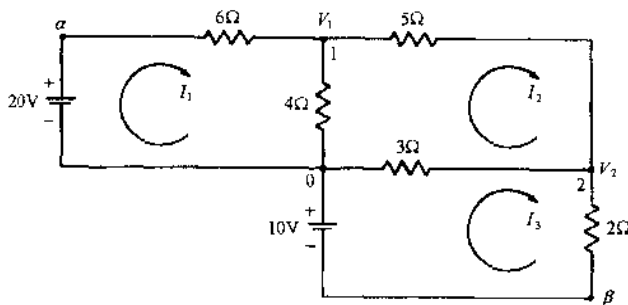


图 2-3

**解** 有三个网孔,定义  $I_k$  是网孔  $k$  ( $k=1,2,3$ ) 中的电流,于是 KVL 给出

$$6I_1 + 4(I_1 - I_2) = 20$$

$$5I_2 + 3(I_2 - I_3) + 4(I_2 - I_1) = 0$$

$$2I_3 + 3(I_3 - I_2) = 10$$

解  $2\Omega$  电阻中的电流  $I_3$ , 得  $I_3 = 2.98\text{A}$ 。

## 2.6 节点分析法

网络的主节点是指由三条或更多支路交会的节点。节点分析法是先定义网络中每个主节点的电位,然后写出以这些电位表示的 KCL。由于电位差具有重要性,因而可将电位之一定成零值,并只将这个方法用至其余的主节点上。

**例 2.2** 用节点分析法求解图 2-3 网络的  $2\Omega$  电阻中的电流。

**解** 在图 2-3 中标出了主节点 0、1、2,并选择节点 0 为参考节点。其次定义节点 1 和 2 对于节点 0 的电压:  $V_{10} \equiv V_1$ 、 $V_{20} \equiv V_2$ 。将 KCL 用于节点 1 和 2,得到:

$$\frac{20 - V_1}{6} + \frac{V_2 - V_1}{5} - \frac{V_1}{4} = 0$$

$$\frac{V_1 - V_2}{5} - \frac{V_2 + 10}{2} - \frac{V_2}{3} = 0$$

解  $V_2$ , 得  $V_2 = -4.046\text{V}$ 。然后,  $2\Omega$  电阻中的电流为

$$I_3 = \frac{V_2 + 10}{2} = \frac{-4.046 + 10}{2} = 2.98(\text{A})$$

由节点 2 流向节点  $\beta$ 。此结果与例 2.1 一致。

## 2.7 网络简化和电源变换

在第 1 章中研究串联电阻(1.10)和并联电阻(1.11)的法则时,已经提到了网络简化方法。对于若干个电压源串联,如图 2-4 所示,或对于若干个电流源并联,如图 2-5 所示,都可以得到一个等效电源。将电阻组合起来得到等效电阻,将电源组合起来得到等效电源,显然简化了计算工作。然而,存在着不能用电阻串联、并联法则进行简化的电阻组合形式。这种情况可以用

星形-三角形(Y- $\Delta$ )变换来讨论。星形电路如图 2-6(a)中所示,三角形电路如图 2-6(b)中所示。如果某一电路的任意两端点之间的电阻等于另一电路的相同两端点之间的电阻,这两个电路就是等效的。这个等效准则可以表示为

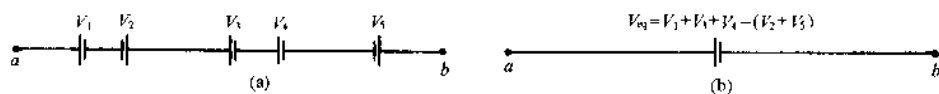


图 2-4

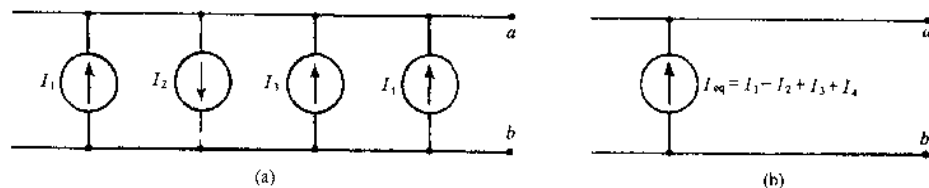


图 2-5

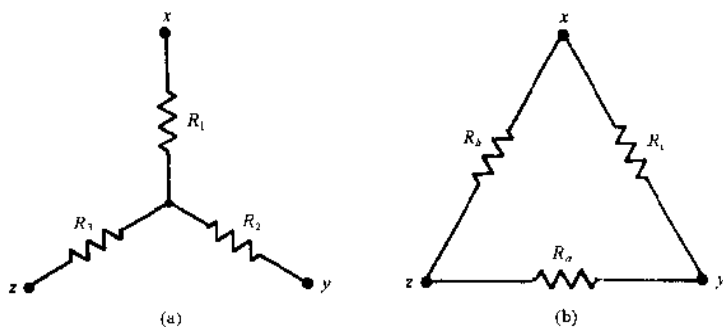


图 2-6

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_2 = \frac{R_a R_c}{R_c + R_b + R_c}, \quad R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.1)$$

或者倒过来

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \quad R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}, \quad R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \quad (2.2)$$

### 例题解答

**2.1** 三个全并联的  $2100\Omega$  电阻跨接于  $210\text{V}$  直流电源上。试计算(a)总电流,(b)通过每个电阻的电流,(c)电阻中消耗的总功率。

由并联电阻的法则,

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{2100} + \frac{1}{2100} + \frac{1}{2100} \quad \text{或} \quad R_{\text{eq}} = 700\Omega$$

$$(a) \quad I = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{210}{700} = 0.3(\text{A})$$

$$(b) \quad \frac{1}{3}I = 0.1(\text{A})$$

$$(c) \quad VI = 210 \times 0.3 = 63(\text{W})$$

- 2.2 欲将三个全并联的  $700\Omega$  电阻连接在  $210\text{V}$  直流电源上, 为了使这些电阻的端电压限制在  $110\text{V}$ , 打算将这个并联组合与一个电阻串联连接。试求出 (a) 串联电阻的值, (b) 从  $210\text{V}$  电源吸收的总功率。

解 (a) 令  $R_s$  为串联电阻的值。

$$\text{每个 } 700\Omega \text{ 电阻的电流} = \frac{110}{700} = 0.157(\text{A})$$

$$\text{从电源吸收的总电流} = 3 \times 0.157 = 0.471(\text{A})$$

$$R_s \text{ 的端电压} = 210 - 110 = 100(\text{V})$$

然后

$$R_s = \frac{100}{0.471} = 212.3(\Omega)$$

(b)

$$P = 210 \times 0.471 = 98.9(\text{W})$$

- 2.3 求出图 2-7 中所示电路的电源电压  $V$ 。

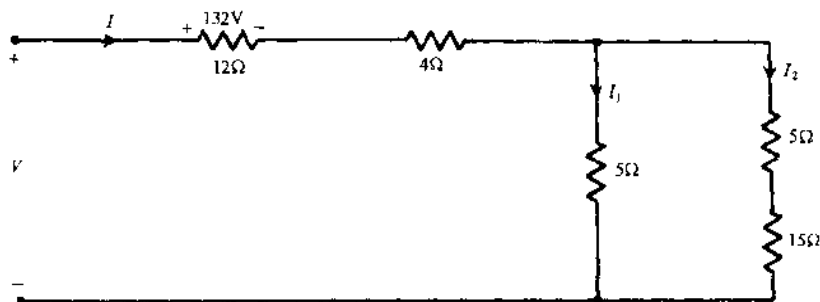


图 2-7

解 由图 2-7,  $I = 132/12 = 11\text{A}$ 。由串联和并联电阻法则, 电路总电阻为

$$R = 12 + 4 + \frac{5(5+15)}{5+5+15} = 20(\Omega)$$

然后

$$V = IR = 11 \times 20 = 220(\text{V})$$

- 2.4 求出图 2-7 所示电路中的  $I_1$  和  $I_2$ 。

解 应用电流分配(1.13),

$$I_1 = \frac{5+15}{5+5+15} \times 11 = 8.8(\text{A})$$

$$I_2 = \frac{5}{5+5+15} \times 11 = 2.2(\text{A})$$

- 2.5 用戴维南等效电路替换图 2-8(a) 网络中端点  $ab$  左侧的部分, 然后求出  $I$ 。

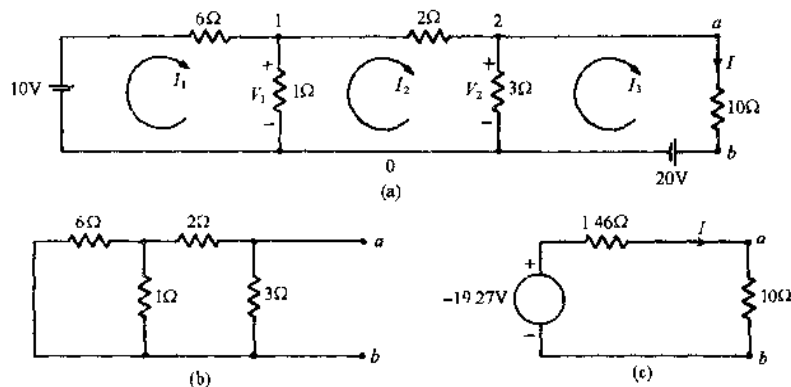


图 2-8

解 将电压源短路得到图 2-8(b) 网络。  $6\Omega$  与  $1\Omega$  并联等效为

$$\frac{6 \times 1}{6 + 1} = \frac{6}{7}(\Omega)$$

这与  $2\Omega$  串联等效为



$$\frac{6}{7} + 2 = \frac{20}{7} (\Omega)$$

于是,  $(20/7)\Omega$  与  $3\Omega$  的并联组合给出

$$R_{Th} = R_{ab} = \frac{(20/7) \times 3}{(20/7) + 3} = \frac{60}{41} = 1.46(\Omega)$$

将端点  $ab$  开路, 于是由  $10V$  电池看到电阻

$$6 + \frac{1 \times (2 + 3)}{1 + 2 + 3} = \frac{41}{6} (\Omega)$$

和从它吸收的电流

$$\frac{10}{41/6} = \frac{60}{41} = 1.46(A)$$

其中通过  $3\Omega$  电阻的为

$$\frac{1}{1 + 2 + 3} \times 1.46 = 0.243(A)$$

于是,

$$V_{Th} = 0.243 \times 3 - 20 = -19.27(V)$$

戴维南等效电路成为如图 2-8(c) 所示, 由此

$$I = \frac{-19.27}{1.46 + 10} = -1.68(A)$$

负号表明  $10\Omega$  中的电流真实流向是由  $b$  向  $a$ 。

## 2.6 用叠加定理求解图 2-8(a) 的电流 $I$ 。

依据叠加定理, 求出归因于每个电源(在没有其他电源时)的电流。最后的电流是这些电流的和。因此用短路替换  $20V$  电源以将其消除。于是图 2-8(a) 网络变成如图 2-9(a) 所示。像题 2.5 中那样组合电阻, 得  $I_1 = 0.0636A$ 。其次消除  $10V$  电源, 得到图 2-9(b) 电路。方法如前, 求得  $I_2 = -1.744A$ , 从而

$$I = I_1 + I_2 = 0.0636 - 1.744 = -1.68(A)$$

显然与题 2.5 的结果一致。

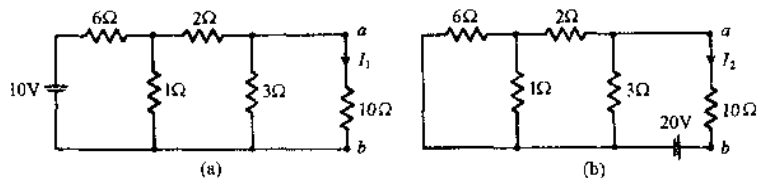


图 2-9

## 2.7 用网孔分析法求出图 2-8(a) 的 $I$ 。

利用图 2-8(a) 表示的三个网孔电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3 (= I)$ , 有

$$7I_1 - I_2 = 10$$

$$-I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0$$

$$3I_2 + 13I_3 = -20$$

求解  $I_3$  得  $I_3 = I = -1.68A$ , 这是前述结果的进一步验证。

## 2.8 用节点分析法计算图 2-8(a) 的 $I$ 。

图 2-8(a) 可以重画成将两个标记为 0 的主节点合而为一。选取这个单一的节点 0 做为基准, 有节点方程

$$\frac{10}{6} \frac{V_1}{1} - \frac{V_1}{1} - \frac{V_1 - V_2}{2} = 0$$

$$\frac{V_1 - V_2}{2} - \frac{V_2}{3} - \frac{V_2 - 20}{10} = 0$$

由此  $V = 3.2V$ 。然后

$$I = \frac{V_2 - 20}{10} = -1.68A$$

题 2.5 至题 2.8 应用了四种不同的网络分析方法。节点分析法通常需要最小的工作量。

2.9 一个电阻网络示于图 2-10(a)中。求出在端点 AB 处的等效电阻值。

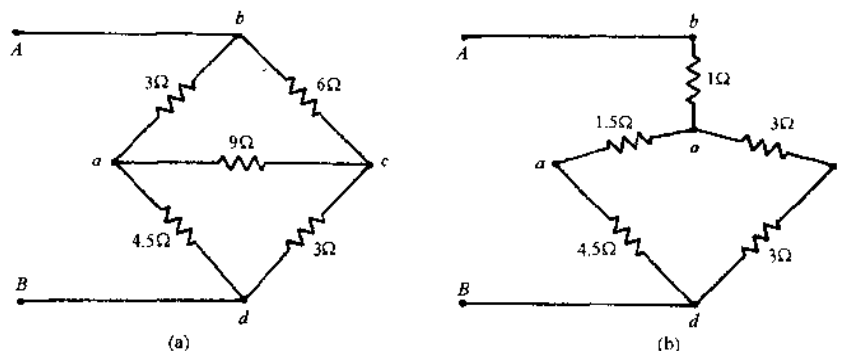


图 2-10

应用式(2.1)将图 2-10(a)的三角形网络  $abc$  变换成星形:

$$R_{ao} = \frac{9 \times 3}{3 + 6 + 9} = 1.5(\Omega), \quad R_{bo} = \frac{6 \times 3}{3 + 6 + 9} = 1(\Omega), \quad R_{co} = \frac{6 \times 9}{3 + 6 + 9} = 3(\Omega)$$

获得的图 2-10(b)网络含有一个串联并联组合的电阻,求得

$$R_{ad} = \frac{(1.5 + 4.5)(3 + 3)}{1.5 + 4.5 + 3 + 3} = 3(\Omega)$$

然后,  $R_{AB} = R_{bo} + R_{ad} = 1 + 3 = 4(\Omega)$ 。

2.10 用可变电阻  $R_{ad}$  替换图 2-10(a)网络中的  $4.5\Omega$ , 并将  $110V$  电源跨接于 AB, 端点 A 为正极。为了使可变电阻从电源吸收最大功率, 电阻值应是多大?

如果是用  $R_{ad}$  替换图 2-10(b)等效网络中的  $4.5\Omega$  来进行工作, 将会使计算简化。 $ab$  端网络的戴维南等效电路示于图 2-11(a)中; 为了最大功率传递, 必须有  $R_{ad} = R_{Th}$  (见题 1.35 和题 1.36)。

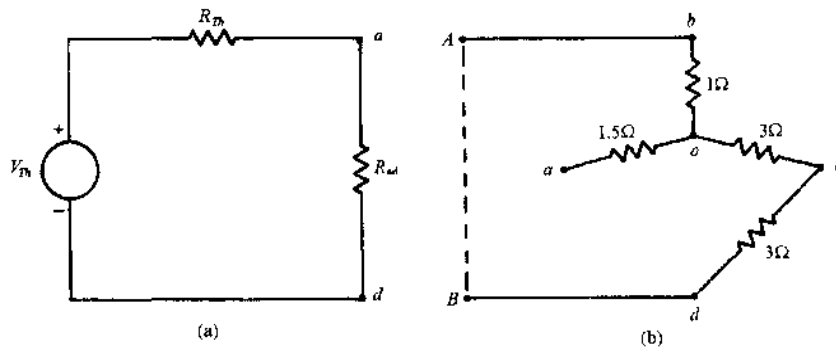


图 2-11

求  $R_{Th}$ , 移去  $R_{ad}$  并用短路[图 2-11(b)中的虚线]替换  $110V$  电源。 $R_{Th}$  就是在  $ad$  处测得的电阻。短路线使  $1\Omega$  和  $3 + 3 = 6(\Omega)$  的并联组合再与  $1.5\Omega$  串联; 然后, 有

$$R_{Th} = R_{ad} = 1.5 + \frac{1 \times 6}{1 + 6} = \frac{33}{14}(\Omega)$$

2.11 计算在取得最大功率条件下, 问题 2.10 中网络提供的总功率。

由图 2-11(a), 用  $R_{ad} = R_{Th} = (33/14)\Omega$ ,

$$\text{总功率} = \frac{V_{Th}^2}{R_{Th} + R_{ad}} = \frac{7}{33} V_{Th}^2 (\text{W})$$

将  $110V$  电源跨接于 AB 时, 戴维南电压  $V_{Th}$  呈现在图 2-11(b)中的  $ad$  两端或  $ao$  两端。这样, 用电压分配,

$$V_{Th} = V_{ad} = \frac{6}{7} \times 110 = \frac{660}{7} (\text{V})$$

和 
$$\text{总功率} = \frac{7}{33} \left( \frac{660}{7} \right)^2 = \frac{13200}{7} = 1886(\text{W})$$

**2.12** 带有电压源和电流源的电阻网络示于图 2-12(a)。试用网孔分析法求出电流  $I_1$ 、 $I_2$ 。

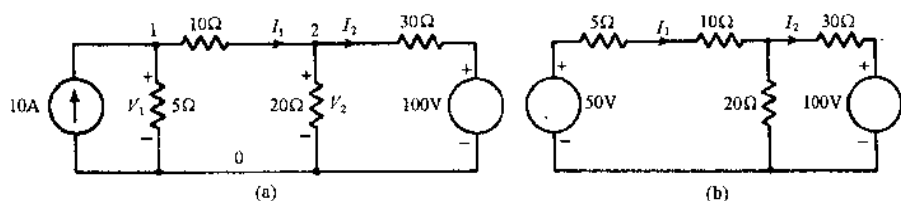


图 2-12

为了便于应用网孔分析法,先将 10A 电流源与  $5\Omega$  电阻并联变换为  $10 \times 5 = 50(\text{V})$  电压源与  $5\Omega$  电阻串联。于是得到图 2-12(b)网络,其网孔方程为

$$\begin{aligned} 35I_1 - 20I_2 &= 50 \\ 20I_1 + 50I_2 &= -100 \end{aligned}$$

求解,  $I_1 = 0.37\text{A}$  和  $I_2 = -1.85\text{A}$ 。

**2.13** 试用节点分析法求解图 2-12(a)网络的  $I_1$  和  $I_2$ 。

为了节点分析法,定义节点电压  $V_1$  和  $V_2$  如图 2-12(a)中所示。在节点 1 和 2, KCL 分别给出

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} &= 10 \\ \frac{V_2}{20} + \frac{V_2 - 100}{30} &= \frac{V_1 - V_2}{10} \end{aligned}$$

它们有解

$$V_1 = \frac{1300}{27}\text{V}, \quad V_2 = \frac{400}{9}\text{V}$$

于是,  $I_1 = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{10}{27} = 0.37(\text{A})$ ,  $I_2 = \frac{V_2 - 100}{30} = \frac{-50}{27} = -1.85(\text{A})$

**2.14** 计算图 2-12(a)的电流源和电压源供出的功率。验证这两个功率的和就是全部电阻消耗的总功率。

10A 电源供出功率  $= 10 \times V_1 = \frac{10 \times 1300}{27} = 481.48(\text{W})$

100V 电源供出功率  $= 100 \times (-I_2) = 100 \times 1.85 = 185(\text{W})$

两个电源供出总功率  $= 481.48 + 185 = 666.48(\text{W})$

$5\Omega$  中消耗功率  $= \frac{V_1^2}{5} = \frac{1}{5} \left( \frac{1300}{27} \right)^2 = 463.65(\text{W})$

$10\Omega$  中消耗功率  $= I_1^2 \times 10 = (0.37)^2 \times 10 = 1.37(\text{W})$

$20\Omega$  中消耗功率  $= \frac{V_2^2}{20} = \frac{1}{20} \left( \frac{400}{9} \right)^2 = 98.76(\text{W})$

$30\Omega$  中消耗功率  $= I_2^2 \times 30 = (1.85)^2 \times 30 = 102.67(\text{W})$

消耗总功率  $= 463.65 + 1.37 + 98.76 + 102.67 = 666.45(\text{W})$

**2.15** 用诺顿定理求解图 2-12(a)网络的  $20\Omega$  电阻中的电流。

诺顿等效电路示于图 2-13(a)中。由 2.3 节知道,  $R_N$  是消除全部电源后在 2、0 处的电阻;除

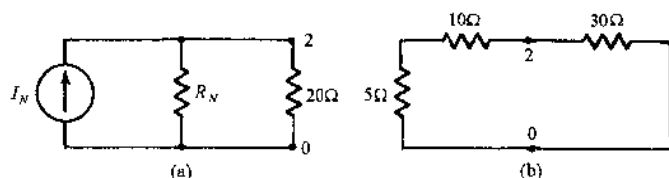


图 2-13

去电压源代以短路,除去电流源代以开路。这样,由图 2-13(b),

$$R_{20} = R_N = \frac{(10+5) \times 30}{10+5+30} = 10(\Omega)$$

诺顿电流  $I_N$  是通过 2、0 的短路电流(保留全部电源而将 2、0 短路时)。由图 2-12(a)注意到,将 2、0 短路时,100V 电源和  $30\Omega$  串联电阻经 2、0 短路,于是归因于 100V 电源的电流成分为

$$I'_N = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}(\text{A})$$

通过 2、0 的短路电流中归因于 10A 电源的成分,用电流分配法则,

$$I''_N = \frac{5}{5+10} \times 10 = \frac{10}{3}(\text{A})$$

然后用叠加,

$$I_N = I'_N + I''_N = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}(\text{A})$$

诺顿电流在  $R_N = 10\Omega$  和  $20\Omega$  之间分配,因之后者中的电流为

$$I_{20} = \frac{10}{10+20} \times \left(\frac{20}{3}\right) = 2.22(\text{A})$$

核验:由题 2.13,  $I_{20} = I_1 - I_2 = 0.37 - (-1.85) = 2.22(\text{A})$ 。

- 2.16** 两个网络示于图 2-14 中;两个电路中电流表的电阻忽略不计。试计算两个网络中电流表的读数并解说这个结果。注意在两个网络中电流表和电压源的位置是互换的。

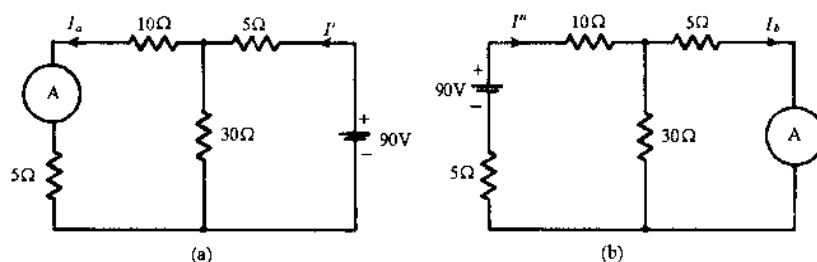


图 2-14

述及图 2-14(a), 由电压源看的电阻为

$$R'_s = 5 + \frac{(10+5) \times 30}{10+5+30} = 15(\Omega)$$

使得

$$I' = \frac{90}{15} = 6(\text{A})$$

然后用电流分配,

$$\text{电流表读数} = I_a = \frac{30}{45} \times 6 = 4(\text{A})$$

同样,对图 2-14(b),

$$R'_s = 15 + \frac{30 \times 5}{30+5} = \frac{135}{7}(\Omega), \quad I' = \frac{90}{135/7} = \frac{14}{3}(\text{A})$$

用电流分配,

$$\text{电流表读数} = I_b = \frac{30}{35} \times \left(\frac{14}{3}\right) = 4(\text{A})$$

电流表读数的相等构成互易定理的一个特例,定理表述:在线性可逆网络中,如某条支路中的电压  $V$  在另条支路中产生电流  $I$ ,则第二支路中的相同电压  $V$  将在第一支路中产生相同电流  $I$ 。

- 2.17** 求出向图 2-15(a)网络提供的功率。

利用式(2.2)将星形网络变换成三角形网络,所得的网络示于图 2-15(b)中。跨接于电压源的总电阻为

$$R = \frac{\left(\frac{6 \times 16.5}{6+16.5} + \frac{9 \times 11}{9+11}\right) \left(\frac{3 \times 33}{3+33}\right)}{\frac{6 \times 16.5}{6+16.5} + \frac{9 \times 11}{9+11} + \frac{3 \times 33}{3+33}} = \frac{17}{8} = 2.125(\Omega)$$

$$\text{提供功率} = \frac{(100)^2}{2.125} = 4705.9(\text{W})$$

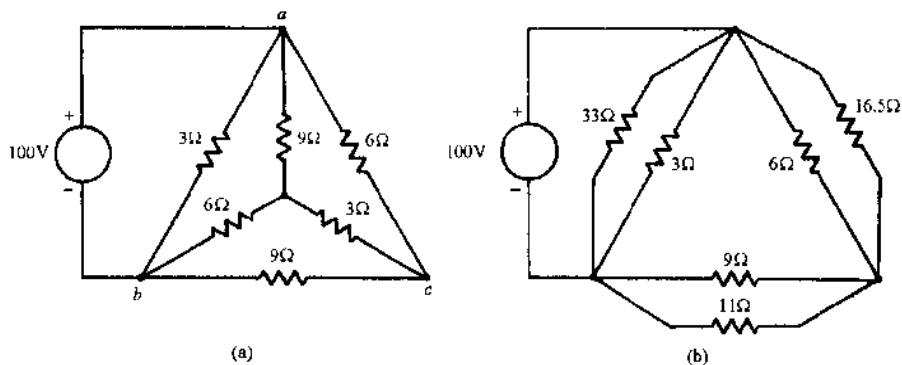


图 2-15

## 补充习题

- 2.18 在图 2-16 电路中, 一个有  $0.1\Omega$  电阻的电流表用于测量线电流, 电流表的量程是  $15\text{A}$ 。(a) 当开关  $S$  断开时, 电流表的量程适当吗? (b) 当开关  $S$  接通时, 一个分流电阻  $R_x$  跨接至电流表两端。试求使电流表读出满刻度时  $R_x$  的值。

答 (a) 不; (b)  $R_x = 0.0584\Omega$

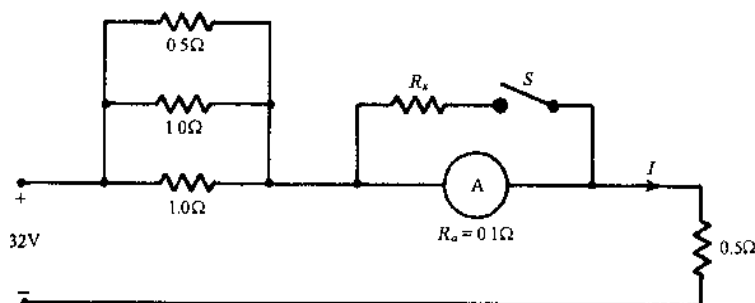


图 2-16

- 2.19 用网孔分析法求出图 2-17 中的电流  $I_1$  和  $I_2$ 。先将电流源变换成电压源。

答  $I_1 = 5\text{A}$ ,  $I_2 = 10\text{A}$

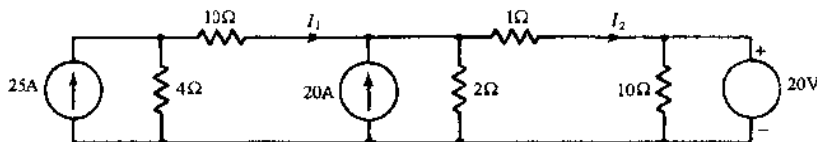


图 2-17

- 2.20 只用节点方程求解图 2-17 网络中的  $I_1$  和  $I_2$ 。
- 2.21 求出图 2-17 网络的  $1\Omega$  和  $4\Omega$  电阻中消耗的功率。  
答  $P_{1\Omega} = 100\text{W}$ ,  $P_{4\Omega} = 1600\text{W}$
- 2.22 应用叠加定理计算图 2-17 网络的  $2\Omega$  电阻中的电流。  
答  $15\text{A}$
- 2.23 (a) 求出每个电源向图 2-17 整个网络供出的功率。(b) 全部电源都是输出功率吗?  
答 (a)  $P_{25\text{A}} = 2000\text{W}$ ,  $P_{20\text{A}} = 600\text{W}$ ,  $P_{20\text{V}} = -160\text{W}$ 。  
(b) 不是;  $20\text{V}$  电源吸收功率。
- 2.24 计算图 2-17 网络的全部电阻中消耗的总功率。

答 2440W

- 2.25 用  $9\Omega$  电阻替换图 2-10(a) 的支路  $cd$  中  $3\Omega$  电阻, 其他电阻保持不变。如果在端点  $AB$  接  $110V$  电源, (a) 从电源中吸收多大功率? (b)  $9\Omega$  电阻中消耗多大功率?

答 (a) 2420W; (b) 484W

- 2.26 求出使图 2-18 电路中电流源和电压源向  $1\Omega$  电阻提供等量功率时  $R_x$  的值。

答  $20\Omega$

- 2.27 将图 2-13(a) 的端点  $20$  开路, 出现在开路两端的电压是多大?

答  $66.67^{\text{①}} V$

- 2.28 用戴维南定理计算图 2-19 网络中的电压  $V_{ab}$ 。

答  $V_{th} = 30V, R_{th} = 10\Omega, V_{ab} = 10V$

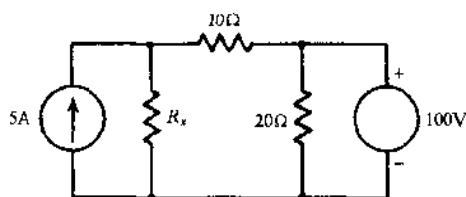


图 2-18

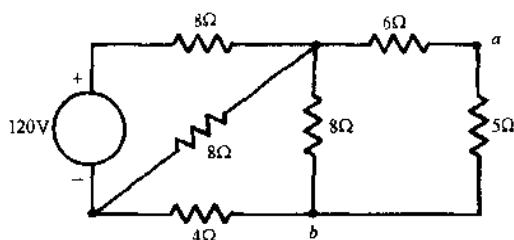


图 2-19<sup>②</sup>

- 2.29 计算图 2-20 网络的  $2\Omega$  电阻中的电流。

答 5A

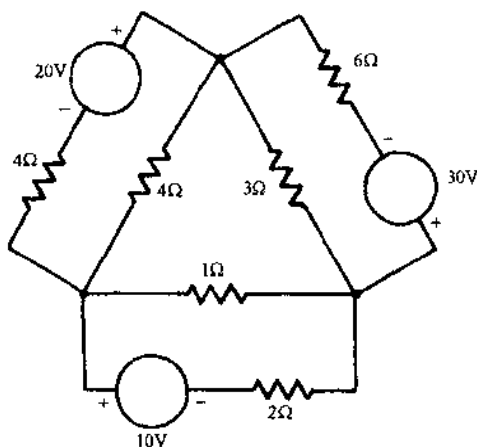


图 2-20

- 2.30 用 (a) 戴维南定理, (b) 叠加定理, 求解图 2-20 中  $1\Omega$  电阻的电流。

答 (a) 0A; (b) 0A

- 2.31 将图 2-15(a) 的电压源开路, 求在端点  $ac$  处的电路电阻。

答  $2.8\Omega$

① 原著中为 33.33; ② 原著图中电压源为 90V。——译者注

### 3.1 正弦输入及其表示法

在前面章节中,激励网络的电压源和电流源是直流(或单向)的。可是,许多有实用意义的电网络是由交流电源激励的。最普通的交流网络的例子是电力网络,包括发电站、输电线、变电所等。所谓交流是交变电流的简称,指的是(电流或电压)方向的周期性反复,将着重于呈正弦变化的量,例如电压

$$v = V_m \sin \omega t \quad (3.1)$$

余弦函数可用于代替正弦函数,但我们将采用式(3.1)形式。

正弦变量可以用图象来描绘,如图3-1是式(3.1)的曲线。在式(3.1)和图3-1中,  $V_m$  称为振幅或最大值,  $\omega$  称为角频率(以 rad/s 即弧度/秒计量)。注意,函数  $v$  是周期性的,每隔  $2\pi$  rad 的角度就自身循环一次。循环的速率称为频率  $f$ 。当一个函数有周期  $T$  时,必定每秒内周期数  $1/T$  就是

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.2)$$

频率以赫兹(Hz)计量,  $1\text{Hz} = 1\text{周/s}$ 。

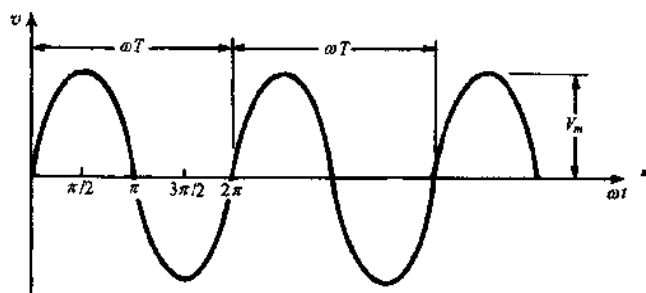


图 3-1

如果除了图3-1的电压之外,有另一个量如电流  $i$ ,可以将电流和电压绘制成图3-2那样,于是,参考式(3.1)的  $v$ ,就可以将  $i$  写成

$$i = I_m \sin(\omega t + \theta) \quad (3.3)$$

这里  $\theta$  称为  $v$  与  $i$  之间的相位角;这两个正弦量相位差别的数值为  $\theta$ 。注意由式(3.3)和图3-2,  $i$  在  $v$  之前或  $i$  超前  $v$  为  $\theta$ 。反过来,  $v$  滞后  $i$  为  $\theta$ 。 $\omega t$  必须以弧度给出,而通常以度给定  $\theta$ 。

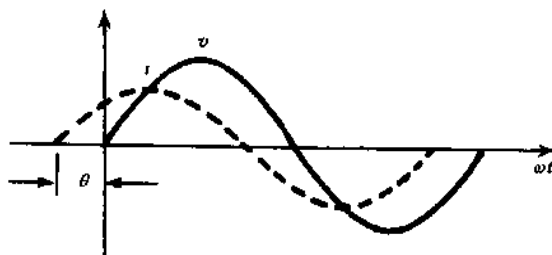


图 3-2

另一种描述正弦量的方法由欧拉公式提供,即

$$\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t} \quad (3.4)$$

$$\cos \omega t = \operatorname{Re}(e^{j\omega t}), \quad \sin \omega t = \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) \quad (3.5)$$

习惯中经常去掉 Re 或 Im, 简写为

$$v = V_m \sin \omega t = V_m e^{j\omega t} \quad (3.6)$$

或将式(3.3)转换为

$$i = I_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (3.7)$$

表达式(3.6)和式(3.7)是正弦量的复指数表示法的例子, 这里显然规定 Re 或 Im 要适当地应用。

第三种表示正弦量的方法是极坐标式或相量表示法。这样, 式(3.6)和式(3.7)被替换为

$$\mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ \quad (3.8)$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \theta \quad (3.9)$$

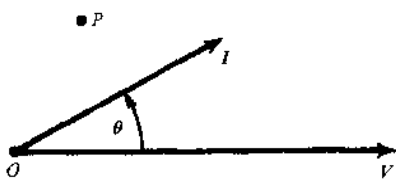


图 3-3

黑体符号用以强调相量是复矢量。举例,  $\mathbf{I}$  有量值  $|\mathbf{I}| = I_m$  (实数) 和方向  $\arg \mathbf{I} = \theta$ 。图 3-3 中表示了相量  $\mathbf{V}$  和  $\mathbf{I}$ 。虽然时间因子  $e^{j\omega t}$  在相量表示法中是不显的, 但是应将图 3-3 中的两个矢量设想为刚性整体绕着  $O$  点在反时针方向以角速度  $\omega$  旋转。 $\mathbf{I}$  将先于  $\mathbf{V}$  到达不动点  $P$ , 这反映了  $i$  超前  $v$  (为  $\theta$ ) 的事实实际上,  $i$  和  $v$  是旋转矢量  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{V}$  分别在垂直(虚)轴上的投影。我们称, 时

间的显函数  $i$  和  $v$  属于时域, 而它们的代表相量  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{V}$  属于频域。

在 3.2 节中将见到适当地改变这些相量值的比例, 而不影响这些量的性质。

### 3.2 瞬时值、平均值、方均根值

用量(在时域中)的瞬时值表示这个量在给定瞬间的值。人们还经常对时变量的平均值感兴趣。显然正弦(或余弦)函数在一个周期内的平均值为零。因而正弦量的另一个概念——方均根值是更为有用的。对于任意的周期函数  $v(t)$ , 方均根值定义为

$$V \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt} \quad (3.10)$$

当然这里  $V$  与  $t_0$  无关。从例 3.1 可以了解这个定义的目的。

**例 3.1** 设想电阻  $R$  跨接于直流电压源  $V_{dc}$ 。电阻吸收的功率为

$$P_{dc} = \frac{V_{dc}^2}{R} \quad (3.11)$$

现在令交流电压源  $v = V_m \sin \omega t$  跨接于  $R$ 。在这种情况下, 瞬时功率由

$$p = \frac{v^2}{R} = \frac{V_m^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

给出。然后, 在一个周期内的平均功率  $P_{ac}$  为

$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{V_m^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{V_m^2}{2R} \quad (3.12)$$

将式(3.12)与式(3.11)比较, 看到对于功率消耗而言, 振幅为  $V_m$  的交流电源与量值

$$V_{dc} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} \equiv V \quad (3.13)$$

的直流电源是等效的。由于这个理由, 正弦量的方均根值  $V = V_m / \sqrt{2}$  也称为有效值。

由于这一点, 全部相量将反映方均根值, 而不反映振幅; 除非做出了相反的确切说明。这样, 时域电压  $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$  在频域中将表示为  $\mathbf{V} = V \angle \varphi$ , 这里  $V = V_m / \sqrt{2}$ 。

### 3.3 R、L、C 的正弦输入稳态响应

由第 1 章, 三个电路元件的瞬时值  $v-i$  关系是:



$$\text{电阻 } R: \quad v_R = Ri_R \quad (3.14)$$

$$\text{电感 } L: \quad v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (3.15)$$

$$\text{电容 } C: \quad v_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad (3.16)$$

对于正弦输入电压  $v_R = V_m \sin \omega t$ , 由式(3.14)得到

$$i_R = \frac{V_m}{R} \sin \omega t \equiv I_m \sin \omega t$$

由此电流是与施加电压同相的, 而它的振幅是  $1/R$  乘以电压的振幅。两个振幅都除以  $\sqrt{2}$  得到方均根值, 可以将式(3.14)改写成为频域形式如

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}_R \quad (3.14a)$$

这里

$$\mathbf{V}_R = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = V_R \angle 0^\circ, \quad \mathbf{I}_R = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = I_R \angle 0^\circ$$

图 3-4(a)用图形表示了相量关系式(3.14a)。如果输入是  $v_R = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ , 则式(3.14a)中的两个相量当然都用角  $\varphi$  替换  $0^\circ$ 。

对于施加了电压  $v_L = V_m \sin \omega t$  的电感  $L$ , 关系式(3.15)的稳态解是

$$i_L = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t \equiv I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

因此, 电流滞后电压为  $90^\circ$ , 而电流的方均根值是  $1/\omega L$  乘方均根值电压。以相量形式表示为

$$\mathbf{V}_L = j\omega L \mathbf{I}_L \quad (3.15a)$$

定义感抗  $X_L \equiv \omega L$ , 以欧姆计量。图 3-4(b)是式(3.15a)的图形; 注意到, 用虚数单位  $j$  乘某个相量(这里是  $\mathbf{I}_L$ )等效于使这个相量沿反时针方向转动  $90^\circ$ 。的确, 设  $z = re^{j\theta}$  是一个任意的复数, 则

$$jz = e^{j\pi/2} (re^{j\theta}) = re^{j(\theta+\pi/2)}$$

相似地,  $1/j = -j$  可以看成是一个算子, 它使相量沿顺时针方向转动  $90^\circ$ 。

最后对于电容  $C$ , 很容易表示出式(3.16)的频域模型为

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}_C \quad (3.16a)$$

式中的量  $1/(\omega C)$  是容抗  $X_C$ 。图 3-4(c)相量图表示了电流超前电压为  $90^\circ$ 。

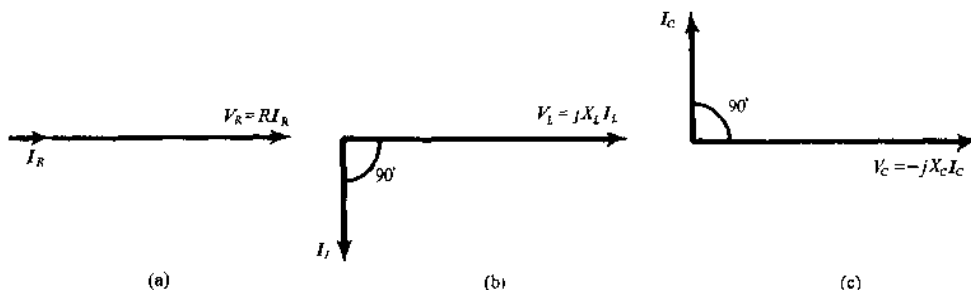


图 3-4

将时域方程(3.15)和(3.16)与它们的频域对应方程(3.15a)和(3.16a)进行比较, 看到  $d(\quad)/dt$  与  $\int(\quad)dt$  的逆运算改变为  $j\omega(\quad)$  与  $(1/j\omega)(\quad)$  的算术逆运算。使相量表示法成为非常有用, 就在于这个事实(拉普拉斯变换具有类似的性质, 见第5章)。

### 3.4 阻抗和串联 RLC 电路

现在研究多于一个元件的稳态交流电路。对于在图 3-5(a)中以频域表示的串联 RL 电路,  $I_R = I_L = I$ 。因此, 由(3.14a)和(3.15a)有(以方均根值表示的)

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = (R + j\omega L)\mathbf{I} \equiv \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (3.17)$$

其中

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L = R + jX_L \quad (3.18)$$

称为电路的阻抗, 仍用  $\Omega$  为单位。 $\mathbf{V}$  和  $\mathbf{I}$  是相量,  $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}$  却不是相量(它不隐含时间因子  $e^{j\omega t}$ ), 仅仅是一个复数。这样, 当以极坐标形式  $\mathbf{Z} = Z \angle \theta$  表示阻抗时,  $Z$  不是方均根值而只是  $Z$  的模。

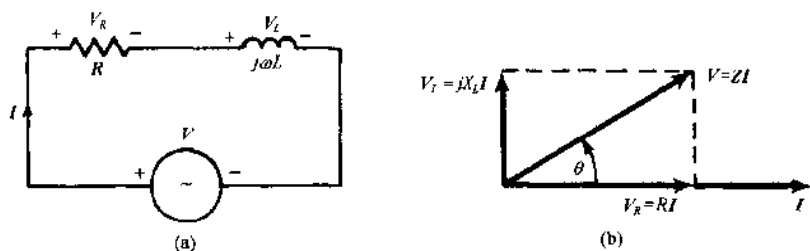


图 3-5

电压-电流关系示于图 3-5(b)串联 RL 电路的相量图中。在绘制这个图时选择了  $\mathbf{I}$  (它对整个电路是公共的) 为参考相量。注意  $\mathbf{I}$  滞后  $\mathbf{V}$  为角  $\theta$ ,

$$\theta = \arg \mathbf{Z} = \arctan \frac{X_L}{R} \quad (3.19)$$

由于将要在 3.6 节中所见的理由, 定义

$$\text{功率因数} \equiv \cos \theta = \frac{R}{Z} \quad (3.20)$$

并且称串联 RL 电路具有滞后的功率因数。

其次, 研究图 3-6(a)的串联 RC 电路, 有图 3-6(b)的相量图和

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C = \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right) \mathbf{I} \equiv \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (3.21)$$

其中

$$\mathbf{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = R - jX_C \quad (3.22)$$

这个电路具有超前的功率因数( $\theta$  是负的了而  $\mathbf{I}$  超前  $\mathbf{V}$ )。

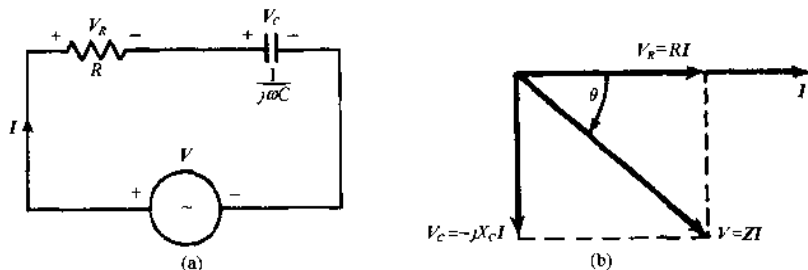


图 3-6

最后, 对于图 3-7(a)中所示的串联 RLC 电路, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &\equiv \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ &= R + j(X_L - X_C) \end{aligned} \quad (3.23)$$

图 3-7(b)是按超前功率因数( $X_L < X_C$ )画的相量图。也有滞后功率因数( $X_L > X_C$ )和全功率因数( $X_L = X_C$ )的可能性。

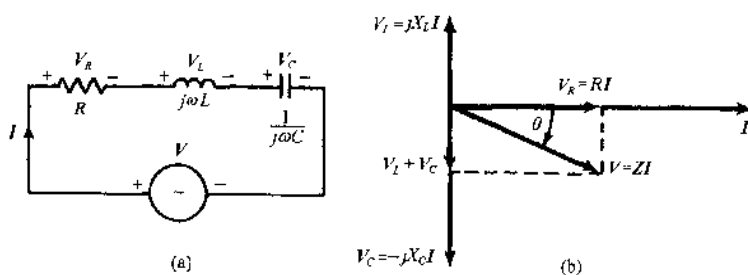


图 3-7

### 3.5 导纳和并联 RLC 电路

正弦稳态的并联 RL 电路示于图 3-8(a)中。对于这个电路,  $V_R = V_L = V$ , 且式(3.14a)和式(3.15a)给出

$$I = I_R + I_L = \frac{V}{R} + \frac{V}{j\omega L} = (G - jB_L)V = YV \quad (3.24)$$

其中

$$Y \equiv G - jB_L \equiv \text{导纳, S}$$

$$G \equiv 1/R \equiv \text{电导, S}$$

$$B_L \equiv 1/X_L \equiv \text{感纳, S}$$

由它的定义, 有

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (3.25)$$

由此,  $Y$  的角  $\varphi$  是  $Z$  的角  $\theta$  之反值, 参看图 3-8(b)。

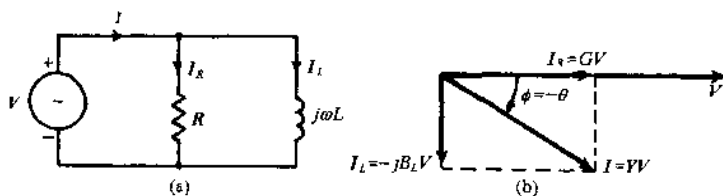


图 3-8

模仿前面, 对于并联 RC 电路, 将有

$$Y \equiv \frac{I}{V} = G + jB_C \quad (3.26)$$

其中  $B_C \equiv \omega C = 1/X_C$  (S) 是容纳。

对于图 3-9(a)的一般并联 RLC 电路, 有  $I = I_R + I_L + I_C$ , 导出

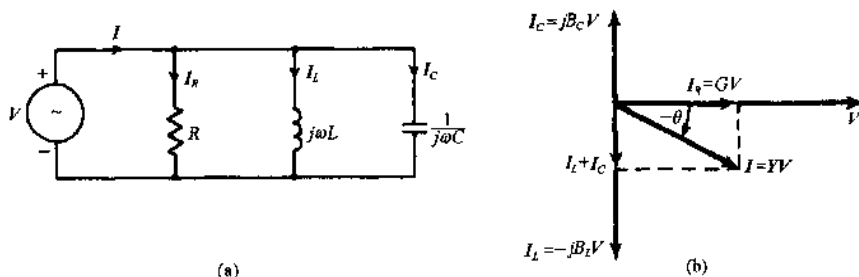


图 3-9

$$Y \equiv \frac{I}{V} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j(B_C - B_L) \quad (3.27)$$

图 3-9(b)是按  $B_C < B_L$  (滞后功率因数)情形画的相量图。注意绘制并联电路的相量图时挑选了  $V$  作为参考相量,因为  $V$  对于全部元件是公共的。

### 3.6 交流电路的功率

令  $v = V_m \sin \omega t$  和  $i = I_m \sin(\omega t - \theta)$  是交流电路中的稳态电压和稳态电流,这里  $\theta$  是取决于电路的角。瞬时功率  $p$  就是

$$p = vi = V_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \theta)$$

设  $T$  是电压波形或电流波形的周期,于是平均功率  $P$  由

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta = VI \cos \theta \quad (3.28)$$

给出,式中  $V$  和  $I$  分别是方均根电压和方均根电流。现在式(3.20)的定义成为有意义的了:视在功率  $VI$  必须乘以因数  $\cos \theta$  才得到实际的平均功率。有时,  $P$  又称为实际功率、有效功率、同相功率或有功功率。如果我们借助于图 3-10(按  $\theta > 0$  情形画的),这个概念就变得较容易理解了,由此形成下面的(平均)功率定义:

$$VI \equiv \text{视在功率, 伏安(VA)}$$

$$P \equiv VI \cos \theta \equiv (\text{有功或有效}) \text{ 功率, W}$$

$$Q \equiv VI \sin \theta \equiv \text{无功功率, 无功伏安(var)}$$

注意这里有功功率为非负的,无功功率可有两种符号之一。三个功率单位 W、VA、var 实质上是等效的。

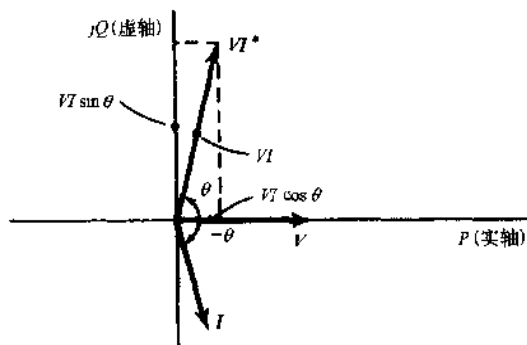


图 3-10

全部三种功率可以从定义为  $VI^*$  (VA) 的单个复功率导出。事实上,当  $V = V \angle 0^\circ$  和  $I = I \angle -\theta$  时,

$$VI^* = (V \angle 0^\circ)(I \angle +\theta) = VI \angle \theta = VI \cos \theta + jVI \sin \theta = P + jQ$$

由此

$$VI = |VI^*|, \quad P = \operatorname{Re}(VI^*), \quad Q = \operatorname{Im}(VI^*) \quad (3.29)$$

### 3.7 谐振

含电阻、电感、电容的串联电路或并联电路在某种条件下表现为纯电阻性电路。这个条件就是谐振。首先研究图 3-7(a)的串联 RLC 电路。如果输入电压的角频率使得感抗与容抗成为相等,即如果

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \text{ 或 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \text{谐振频率} \quad (3.30)$$

于是由式(3.23),  $Z = R$  为最小值。因而,对于给定的电压振幅,电流振幅为最大值且电路工作在全功率因数。

类似地,图 3-9(a)并联电路在式(3.30)给出的谐振频率下也表现为纯电阻性电路。然而不同于串联电路,并联  $RLC$  电路在谐振频率时具有阻抗最大值。在  $RLC$  电路的瞬态响应中,谐振频率的重要性将在例 4.3 和题 4.5 中见到。

在图 3-11 中表示了一条普通的归一化谐振曲线,它表明了涉及谐振现象的某些概念。当某频率时纵坐标值为峰值纵坐标的  $1/\sqrt{2}$ ,此频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  称为半功率频率。(在这两个频率时,给定电压下进入串联  $RLC$  电路的功率实际是最大可能功率的一半。对于并联  $RLC$  电路,功率是频率无关的,但仍沿用这个名称。)半功率频率的间隔是谐振峰尖锐度的计量,定义

$$\text{带宽} \equiv \omega_2 - \omega_1 \quad (3.31)$$

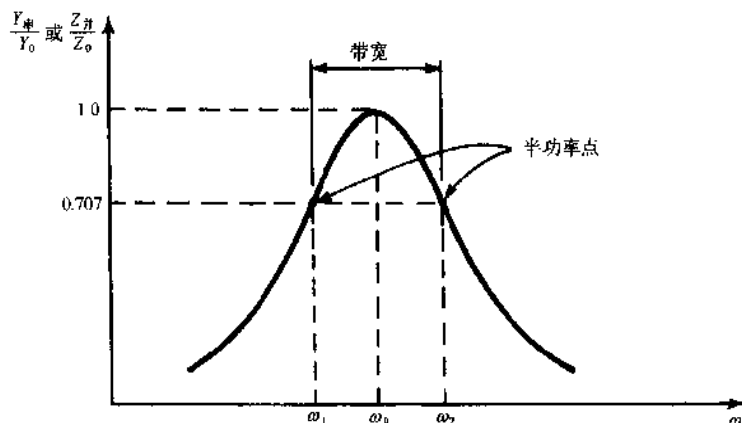


图 3-11

为了对这个带宽的几何概念给出物理意义,可以导出品质因数(无量纲的数),

$$Q \equiv \frac{2\pi(\text{电路中最大贮能})}{\text{每周总耗能}} \quad (3.32)$$

如题 3.35 和题 3.15 所示,对于串联谐振电路和并联谐振电路,品质因数为

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad Q_p = \omega_0 CR \quad (3.33)$$

这些表达式符合于对偶变换  $R \rightarrow 1/R, L \rightarrow C, C \rightarrow L$ 。于是(题 3.36)对两个电路,

$$\text{带宽} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.34)$$

### 3.8 三相电路

多数电力系统都是三相的,它们包含三个同振幅、同频率但相互移动  $120^\circ$ (时间)的电压源。

$$\begin{aligned} v_a &= V_m \sin \omega t & \mathbf{V}_a &= V \angle 0^\circ \\ v_b &= V_m \sin(\omega t - 120^\circ) & \text{或} & \mathbf{V}_b = V \angle -120^\circ \\ v_c &= V_m \sin(\omega t - 240^\circ) = V_m \sin(\omega t + 120^\circ) & \mathbf{V}_c &= V \angle 120^\circ \end{aligned}$$

照例这里  $V = V_m/\sqrt{2}$ , 见图 3-12。

这三个电压源依图 2-6 中(对电阻)的定义互相按星形或按三角形连接。星形连接的电压三相系统及其对应的相量图分别示于图 3-13(a)和(b)中。三角形连接系统及其相量图的例分别示于图 3-14(a)和(b)中。图 3-13(b)表示出相电压  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_{an}, \mathbf{V}_b = \mathbf{V}_{bn}, \mathbf{V}_c = \mathbf{V}_{cn}$ ; 线电压标示为  $\mathbf{V}_{ab}, \mathbf{V}_{bc}, \mathbf{V}_{ca}$ 。显然,在星形连接时相电流与线电流相同。设用下标  $p$  表示相的量,用下标  $l$  表示线的量,于是由图 3-13,有

$$\text{星形连接: } \mathbf{V}_l = \sqrt{3}\mathbf{V}_p, \quad \mathbf{I}_l = \mathbf{I}_p \quad (3.35)$$

由图 3-14,得到

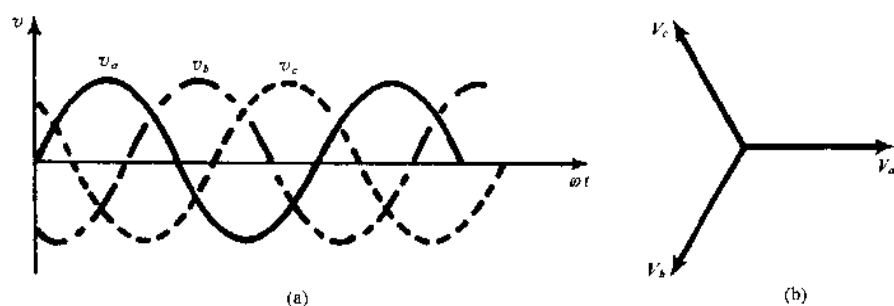


图 3-12

$$\text{三角形连接: } V_l = V_p, \quad I_l = \sqrt{3}I_p \quad (3.36)$$

在图 3-13(b)和图 3-14(b)中, 电流被任意画成滞后于电压。

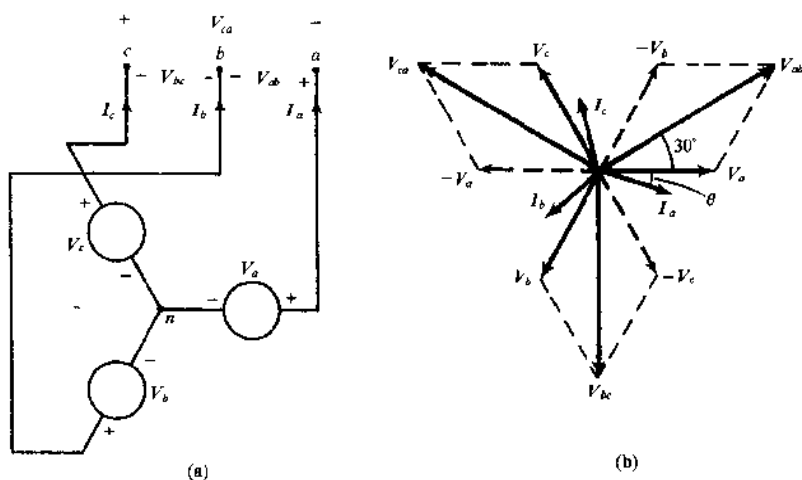


图 3-13

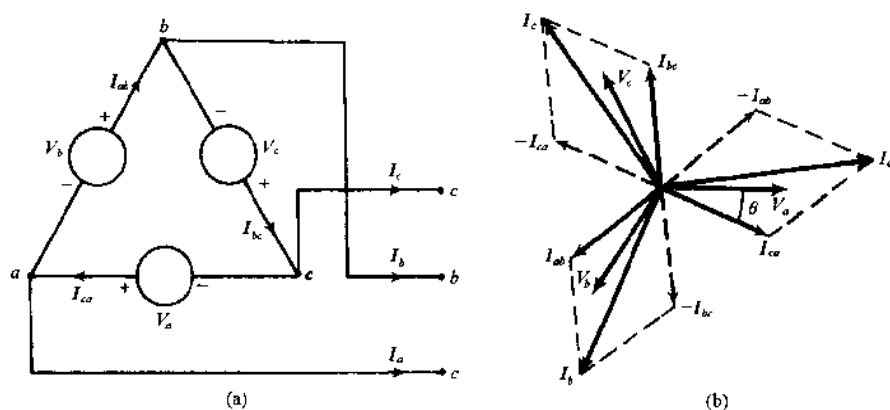


图 3-14

式(3.35)和式(3.36)很清楚, 对于两种连接法, 三相电路的视在功率都由

$$\text{视在功率} = \sqrt{3}V_l I_l = 3V_p I_p \quad (\text{VA}) \quad (3.37)$$

给出, 而且有功功率和无功功率为

$$P = \sqrt{3}V_l I_l \cos \theta \quad (\text{W}), \quad Q = \sqrt{3}V_l I_l \sin \theta \quad (\text{var}) \quad (3.38)$$

式中,  $V_p$  超前  $I_p$  的角  $\theta$  表示在图 3-13(b)和图 3-14(b)中。

如同电阻可以按星形或按三角形连接, 阻抗也可以同样连接构成三相负载。对于三相电路的分析, 一般将电路分解到每相, 而每相电路按通常方法研究。

最后需要强调,因为交流电路的阻抗  $Z$  是模拟直流电路的电阻  $R$ ,在第1章和第2章中对于直流电路所阐述的大多数法则和定律(如戴维南定理、互易性、基尔霍夫定律)同样可应用于交流电路。

### 例题解答

#### 3.1 某交流电路的瞬时电压和瞬时电流为

$$v = 155.6 \sin 377t \text{ (V)}, \quad i = 7.07 \sin(377t - 36.87^\circ) \text{ (A)}$$

试表示它们, (a)用省略实部的复指数式和(b)用相量图。

解 (a)  $v = 155.6 e^{j377t} \text{ (V)} \quad i = 7.07 e^{j(377t - 36.87^\circ)} \text{ (A)}$

(b) 见图 3-15。

#### 3.2 对于题 3.1 中给出的电压和电流,试求出(a)频率(按赫兹), (b)周期, (c) $v$ 与 $i$ 之间的相位角(按弧度)。

(a)  $\omega = 377 = 2\pi f$  或  $f = \frac{377}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$

(b)  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0.0167 \text{ s}$

(c) 相位角  $= 36.87^\circ = 36.87^\circ \left( \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right) = 0.64 \text{ rad}$

#### 3.3 图 3-16 的电压波施加于 $20\Omega$ 电阻。如果电能的价格是每 kWh(千瓦时)0.06 美元,电路运行 24 小时的费用是多少?

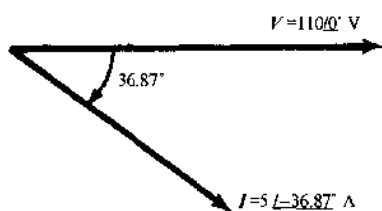


图 3-15

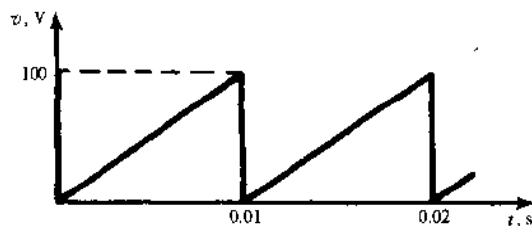


图 3-16

解 由图 3-16,  $v = 10^4 t \text{ (V)}, 0 < t < 0.01 \text{ s}$ , 且  $v$  是周期性的, 周期为  $0.01 \text{ s}$ 。于是:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{10^4}{20} t = 500t \text{ (A)}$$

$$p = vi = (10^4 t)(500t) = 5 \times 10^6 t^2 \text{ (W)}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{0.01} \int_0^{0.01} 5 \times 10^6 t^2 dt = \frac{500}{3} \text{ W} = \frac{1}{6} \text{ kW}$$

$$\text{能量} = P \times \text{时间} = \frac{1}{6} \times 24 = 4 \text{ kWh}$$

$$\text{费用} = 0.06 \times 4 = 0.24 \text{ 美元}$$

#### 3.4 试求题 3.3 电压波形的方均根值。

解 用式(3.10),

$$V = \left[ \frac{1}{0.01} \int_0^{0.01} (10^4 t)^2 dt \right]^{1/2} = \left[ \frac{10^8}{0.01} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{0.01} \right]^{1/2} = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ V}$$

#### 3.5 已知某交流电路的 $v = 200 \sin 377t \text{ (V)}$ 和 $i = 8 \sin(377t - 30^\circ) \text{ (A)}$ 。试求(a)功率因数, (b)实际功率, (c)视在功率, (d)无功功率。

解 (a) 电流滞后于电压为  $\theta = 30^\circ$ ,

$$\text{功率因数} = \cos 30^\circ = 0.866 \text{ 滞后}$$

(b) 由数据,  $V = (200/\sqrt{2}) \text{ V}$ ,  $I = (8/\sqrt{2}) \text{ A}$ , 因此

$$\text{实际功率} = VI \cos \theta = \left( \frac{200}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{8}{\sqrt{2}} \right) (0.866) = 692.8 \text{ W}$$

$$(c) \quad \text{视在功率} = VI = \left( \frac{200}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{8}{\sqrt{2}} \right) = 800 \text{ VA}$$

$$(d) \quad \text{无功功率} = VI \sin \theta = \left( \frac{200}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{8}{\sqrt{2}} \right) (0.5) = 400 \text{ var}$$

3.6 一个线圈当跨接于 100V、60Hz 电源时, 有  $10\Omega$  电阻且引起 5A 电流。试求 (a) 线圈的电感, (b) 电路的功率因数, (c) 无功功率。

$$(a) \quad Z = \frac{100}{5} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{10^2 + (377L)^2} \text{ 或 } L = 45.94 \text{ mH}$$

$$(b) \quad \cos \theta = \frac{R}{Z} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \theta = 60^\circ$$

$$(c) \quad \text{无功功率} = VI \sin \theta = 100 \times 5 \sin 60^\circ = 433 \text{ var}$$

3.7 串联 RLC 电路由 100V、79.6Hz 电源激励, 并有如下数据:  $R = 100\Omega$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $C = 5\mu\text{F}$ 。试计算 (a) 输入电流, (b) 各元件的端电压。

$$(a) \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \times 79.6 = 500 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 500 \times 1 = 500\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{500 \times 5} = 400\Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 100 + j(500 - 400) = 100 + j100 = 141.4 \angle 45^\circ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{141.4 \angle 45^\circ} = 0.707 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$(b) \quad V_R = RI = (100)(0.707 \angle -45^\circ) = 70.7 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$V_L = jX_L I = (500 \angle 90^\circ)(0.707 \angle -45^\circ) = 353.5 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$V_C = -jX_C I = (400 \angle -90^\circ)(0.707 \angle -45^\circ) = 282.8 \angle -135^\circ \text{ V}$$

3.8 对于图 3-17(a) 中所示的电路, 计算每个元件的通过电流和端电压; 然后画出表示全部电压和全部电流的相量图。

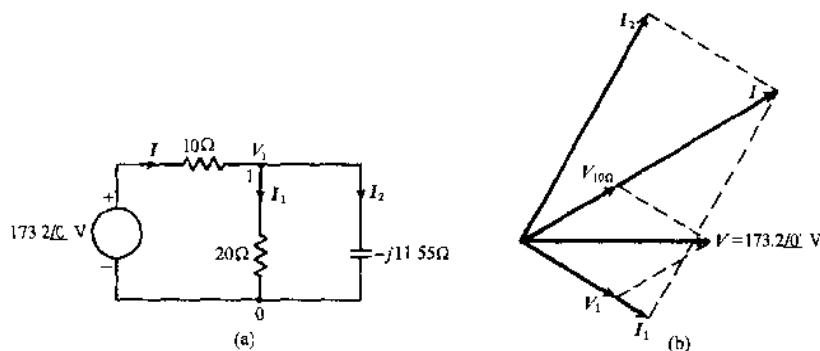


图 3-17

在节点 1 上应用节点分析法, 以  $V_1 = V_{10}$ ,

$$\frac{V_1 - 173.2}{10} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1}{-j11.55} = 0, \text{ 从而 } V_1 = 100 \angle -30^\circ \text{ V}$$

由此,

$$V_{10\Omega} = 173.2 \angle 0^\circ - V_1 = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$I = \frac{V_{10\Omega}}{10} = \frac{100 \angle 30^\circ}{10} = 10 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{20} = \frac{100 \angle -30^\circ}{20} = 5 \angle -30^\circ \text{ A}$$



$$I_2 = \frac{V_1}{-j11.55} = \frac{100 \angle -30^\circ}{11.55 \angle -90^\circ} = 8.66 \angle 60^\circ \text{ A}$$

可以很容易检验  $I = I_1 + I_2$ 。图 3-17(b) 的相量图表示了全部电压和全部电流。

3.9 对于图 3-18 中所示的电路, 计算电压源的供出电流和电流源的两端电压。

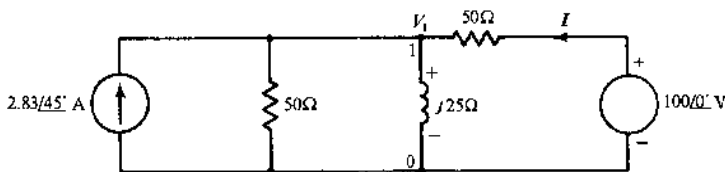


图 3-18

以  $V_1 = V_{10}$  = 电流源两端电压, 在节点 1 有

电流入 = 电流出

$$2.83 \angle 45^\circ - \frac{V_1}{50} = \frac{V_1}{j25} + \frac{V_1 - 100}{50}$$

由此  $V_1 = 25 + j75 \text{ V}$ , 于是从电压源供出的电流为

$$I = \frac{100 - V_1}{50} = 1.5 - j1.5 \text{ A}$$

3.10 对于图 3-18 电路, 用关系式  $P = \text{Re}(VI^*)$  求出 (a) 由电压源输出的功率, (b) 由电流源输出的功率; (c) 验证这两个功率的和就是两个电阻中消耗的功率。

(a) 由题 3.9,  $I = 1.5 - j1.5 \text{ A}$ ,

$$P_V = \text{Re}[(100 + j0)(1.5 + j1.5)] = 150 \text{ W}$$

(b) 再由题 3.9,  $V_1 = 25 + j75 \text{ V}$ ,  $2.83 \angle 45^\circ = 2 + j2 \text{ A}$ , 于是

$$P_I = \text{Re}[(25 + j75)(2 - j2)] = 50 + 150 = 200 \text{ W}$$

(c) 两个电阻中消耗的功率为

$$\begin{aligned} I^2(50) + \frac{V_1^2}{50} &= [1.5^2 + 1.5^2] \times 50 \\ &+ \frac{25^2 + 75^2}{50} = 225 + 125 = 350 \text{ W} = P_V + P_I \end{aligned}$$

3.11 (a) 如果  $R = \sqrt{L/C}$ , 试证明图 3-19 电路在全部频率时都是谐振的。(b) 已知  $V = 100 \text{ V}$  和  $R = 40 \Omega$ , 试计算在普适谐振下的输入电流和输入功率。

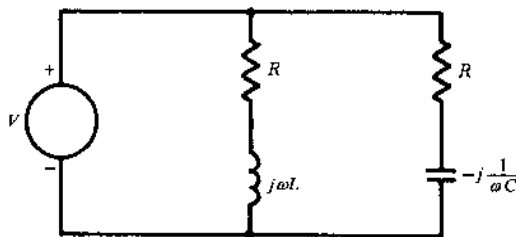


图 3-19

(a) 电压源“看到”阻抗  $R + j\omega L$  与  $R - j(1/\omega C)$  并联; 而输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{[R + j\omega L][R - j(1/\omega C)]}{2R + j[\omega L - (1/\omega C)]} = \frac{R^2 + (L/C) + jRX}{2R + jX} \quad (1)$$

式中  $X = \omega L - (1/\omega C)$ 。由式(1)的两端减去  $R$ ,

$$Z_{in} - R = \frac{(L/C) - R^2}{2R + jX} \quad (2)$$

如果  $L/C = R^2$ , 由式(2)证明在全部  $\omega$  时  $Z_{in} = R$ 。

(b)

$$I_{in} = \frac{V}{Z_{in}} = \frac{100}{40} = 2.5 \text{ A}$$

$$P = V_m \cos 0^\circ = 100 \times 2.5 \times 1 = 250 \text{ W}$$

- 3.12 具有内阻抗  $Z_S = R_S + jX_S$  的电压源  $V \angle 0^\circ$  向具有阻抗  $Z_L = R_L + jX_L$  的负载供电。如果  $R_L$  和  $X_L$  是各自可变的, 试证明当  $R_L = R_S$  和  $X_L = -X_S$  即  $Z_L = Z_S^*$  时, 可向负载传递最大功率。(这称为最大功率传递条件。)问在这个条件下向负载传递的功率是多少?

因为  $Z_S$  与  $Z_L$  是串联的, 有负载电流

$$I_L = \frac{V}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}}$$

向负载传递的功率为

$$\begin{aligned} P &= I_L^2 R_L = \frac{V^2 R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} \leq \frac{V^2 R_L}{(R_S + R_L)^2} \\ &= \frac{V^2}{4R_S} \left[ 1 - \left( \frac{R_S - R_L}{R_S + R_L} \right)^2 \right] \leq \frac{V^2}{4R_S} \end{aligned}$$

由于  $X_L = -X_S$ , 得到第一方面等式; 由于  $R_L = R_S$ , 得到第二方面等式。于是由于  $Z_L = Z_S^*$ ,  $P$  得到它的绝对最大值  $V^2/4R_S$ 。

- 3.13 电容  $C$  与  $15 \text{ mH}$  纯电感的并联组合串联连接  $20 \Omega$  电阻。在角频率  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  时, 求使线电流与线电压的相位差为  $45^\circ$  时的  $C$  值。

当  $R = 20 \Omega$  时, 为了使  $V$  与  $I$  的相位差达到  $45^\circ$ , 并联  $LC$  组合的净电抗必须是  $\pm 20 \Omega$ ,

$$\frac{1}{\pm j20} = \frac{1}{j1000 \times 0.015} + j1000C$$

或

$$C = \frac{1}{1000} \left( \frac{1}{15} \mp \frac{1}{20} \right) = 16.67 \mu\text{F}, 116.7 \mu\text{F}$$

对于较小的(较大的)电容,  $I$  滞后(超前)  $V$  为  $45^\circ$ 。

- 3.14  $46 \text{ mH}$  电感线圈具有  $10 \Omega$  电阻。(a) 如果跨接于  $100 \text{ V}$ 、 $60 \text{ Hz}$  电源, 它将吸收多大电流? (b) 线圈的功率因数是多大? (c) 为了使总电路得到全功率因数, 试求出必须在线圈上跨接的电容值。

(a)  $\omega L = (2\pi \times 60) \times (46 \times 10^{-3}) = 17.34 \Omega$ ,  $Z_L = 10 + j17.34 = 20.0 \angle 60^\circ \Omega$

于是,

$$I_L = \frac{100 \angle 0^\circ}{20.0 \angle 60^\circ} = 5.0 \angle -60^\circ \text{ A}$$

(b)

$$\text{功率因数} = \cos 60^\circ = 0.5 \text{ 滞后}$$

(c) 并联组合的导纳将是

$$\frac{1}{Z_L} + j\omega C = \frac{1}{10 + j17.34} + j377C = \frac{1}{40} + j(377C - 0.0434)$$

为了全功率因数, 虚部必须等于零, 得

$$C = \frac{0.0434}{377} = 115 \mu\text{F}$$

- 3.15 导出并联  $RLC$  谐振电路的品质因数  $Q_p$ 。

假定为稳态且谐振, 施加电压和电感线圈电流具有形式

$$v = V_m \sin \omega_0 t, \quad i_L = \frac{V_m}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -\frac{V_m}{\omega_0 L} \cos \omega_0 t$$

式中  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  为谐振频率, 于是电路中的瞬时能量为

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2} Li_L^2 + \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{1}{2} CV_m^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} CV_m^2 \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} CV_m^2 = \text{常数} \end{aligned}$$

然后,  $Q_p$  的定义式(3.32)中的分子有值  $\pi CV_m^2$ 。

关于分母, 电路的平均功率损耗为

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{R} = \frac{V_m^2}{2R}$$

由此每周期的能量损耗为

$$\left(\frac{V_m^2}{2R}\right) \times \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi V_m^2}{R\omega_0}$$

结果为

$$Q_p = \frac{\pi C V_m^2}{\pi V_m^2 / R \omega_0} = \omega_0 C R$$

3.16 对于图 3-19 电路, 证明  $Z_{in}(\omega)$  (输入阻抗是频率的函数) 的轨迹是复平面中的圆。

用题 3.11(a),

$$Z_{in} = R + \frac{(L/C) - R^2}{2R + jX}$$

式中  $X$  随  $\omega$  而变。这里假定  $L/C \neq R^2$ 。图 3-20(a) 绘制了当  $\omega$  由 0 变至  $\infty$  过程中  $1/(2R + jX)$  的轨迹; 这是一个中心在实轴上、直径为  $1/(2R)$  的圆。用因子  $(L/C) - R^2$  将这个圆等比例放大, 再沿实轴平移  $+R$  单位, 得出  $Z_{in}$  的轨迹图 3-20(b)。注意在  $\omega = \omega_0$  (并联谐振) 时  $|Z_{in}|$  达到最大值。

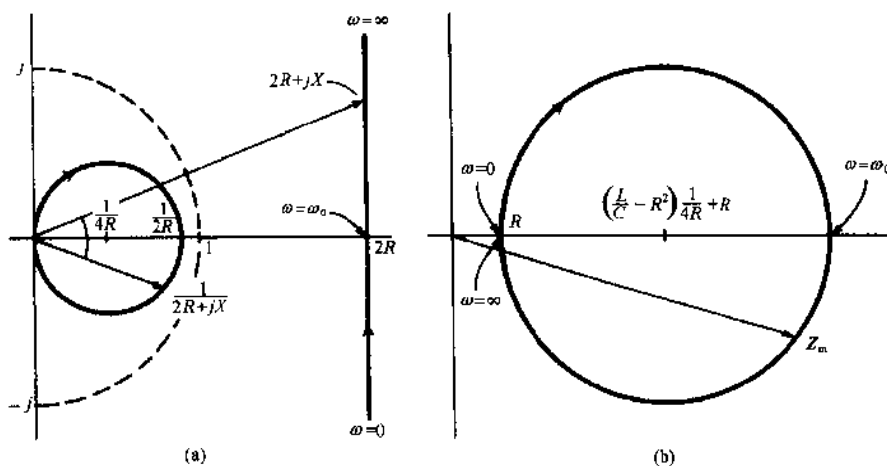


图 3-20<sup>①</sup>

3.17 以线-线电压  $V$  和功率因数  $\cos\theta$  在电力传输线路上传输功率  $P$ 。可以用单相二线的线路或三相三线的线路来传输这个功率, 选择时仅仅依据在给定的铜(电阻)损耗下线路需用最少的铜。问应该选择哪个系统, 近似节省多少铜?

令  $I_1$  和  $I_3$  分别是单相线路和三相线路的线电流。由于功率传输相等, 用式(3.38),

$$P = VI_1 \cos\theta = \sqrt{3} V I_3 \cos\theta \quad (1)$$

由于功率损耗相等,

$$2I_1^2 R_1 = 3I_3^2 R_3 \quad (2)$$

式中  $R_1$  和  $R_3$  分别是单相线路和三相线路中每根导线的电阻。

由式(1)和式(2)得

$$R_3 = 2R_1 \quad (3)$$

因为  $R = \rho l/A$ , 设  $A_1$  和  $A_3$  分别是单相线路和三相线路中导线的横截面积, 式(3)意味着

$$A_1 = 2A_3 \quad (4)$$

而铜的体积分别是

$$(\text{体积})_1 = 2(A_1 l), \quad (\text{体积})_3 = 3(A_3 l) \quad (5)$$

式(4)和式(5)一起给出

$$(\text{体积})_1 = \frac{4}{3} (\text{体积})_3$$

因此, 优先选择三相系统, 结果是铜的体积节省了 25%。

<sup>①</sup> 原著图 3-20(a) 中圆心处标注为  $\frac{1}{4}R$ , 圆的直径标注为  $\frac{1}{2}R$ 。——译者注

- 3.18 三相电压源有 120V 的相电压,向具有每相阻抗  $36 + j48\Omega$  的星形连接负载供电。试计算(a)线电压,(b)线电流,(c)功率因数,(d)向负载提供的总三相功率。

$$(a) \quad V_l = \sqrt{3}V_p = \sqrt{3} \times 120 = 207.8V$$

$$(b) \quad I_l = I_p = \frac{V_p}{Z} = \frac{120}{\sqrt{(36)^2 + (48)^2}} = 2A$$

$$(c) \quad \cos\theta = \frac{R}{Z} = \frac{36}{60} = 0.6 \text{ 滞后}$$

$$(d) \quad \text{功率} = \sqrt{3}V_l I_l \cos\theta = \sqrt{3} \times 207.8 \times 2 \times 0.6 = 432W$$

- 3.19 如果题 3.18 的相阻抗按三角形连接,并用 207.8V 的三相电源[见题 3.18(a)],试计算(a)相电流,(b)线电流,(c)功率因数,(d)总功率。

$$(a) \quad I_p = \frac{207.8}{60} = 3.46A$$

$$(b) \quad I_l = \sqrt{3}I_p = \sqrt{3} \times 3.46 = 6A$$

$$(c) \text{ 由题 3.18(c), } \cos\theta = 0.6 \text{ 滞后}$$

$$(d) \quad \text{总功率} = \sqrt{3}V_l I_l \cos\theta = \sqrt{3} \times 207.8 \times 6 \times 0.6 = 1296W$$

### 补充习题

- 3.20 已知  $v = 70.7\sin(314t - 20^\circ)(V)$ ,  $i = 2.12\cos(314t + 10^\circ)(A)$ 。(a) $v$  与  $i$  之间的相位角是多少?(b)以 Hz 为单位的频率是多少?(c)表示出  $v$  和  $i$  的相量(方均根)。

答 (a) $120^\circ$ ;(b)50Hz;(c) $V = 50.0 \angle -20^\circ V$ ,  $I = 1.5 \angle 100^\circ A$

- 3.21 由题 3.20 的数据求出平均功率。这个电路吸收功率吗?

答  $-37.5W$ ;不

- 3.22 对于题 3.1 的数据,计算出(a)瞬时功率;(b)平均功率;(c)无功功率;(d)视在功率;(e)功率因数。

答 (a) $1100\sin 377t \sin(377t - 36.87^\circ)(W)$ ;(b)440W;(c)330var;(d)550VA;(e)0.8 滞后

- 3.23 求出题 3.3 中所得电流的方均根值。

答  $2.89A \approx 5/\sqrt{3}A$

- 3.24 对于图 3-5(a)电路,如  $V = V \angle 0^\circ (V)$ ,写出瞬时稳态电流的表达式。

$$\text{答 } i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R})(A)$$

- 3.25 某串联  $RLC$  电路通过  $10 \angle 0^\circ A$  的电流。它的参数为: $R = 8\Omega$ ,  $X_L = 12\Omega$ ,  $X_C = 6\Omega$ 。试求出(a)三个元件的端电压,(b)整个电路的端电压。

答 (a) $V_R = 80 \angle 0^\circ V$ ,  $V_L = 120 \angle 90^\circ V$ ,  $V_C = 60 \angle -90^\circ V$ ;(b) $V = 100 \angle 36.9^\circ V$

- 3.26 在图 3-21 的交流桥式电路中,

$$Z_1 = Z_2 = Z_D = 10 + j0\Omega$$

$$Z_3 = -Z_4 = j10\Omega$$

且  $V = 40 \angle 0^\circ V$ 。试求(a)电容中的电流,(b)电感中的电流。

答 (a) $|1 + j3| = 3.162A$ ;(b) $|1 - j3| = 3.162A$

- 3.27 对于题 3.26 的桥式电路,试求出从电源吸收的功率。

答 80W

- 3.28 由电流激励的交流电路示于图 3-22 中。试求出(a)电感的端电压,(b)两个电阻消耗的功率。

答 (a) $20 \angle 0^\circ V$ ;(b)2W

- 3.29 阻抗  $15 + j20\Omega$  跨接于 125V,60Hz 的电源。试求(a)通过负载的瞬时电流,(b)瞬时功率,(c)平均有功功率和无功功率。

答 (a) $7.07\sin(377t - 53.1^\circ)(A)$ ;(b) $1250\sin 377t \sin(377t - 53.1^\circ)(W)$ ;(c)375W, 500var

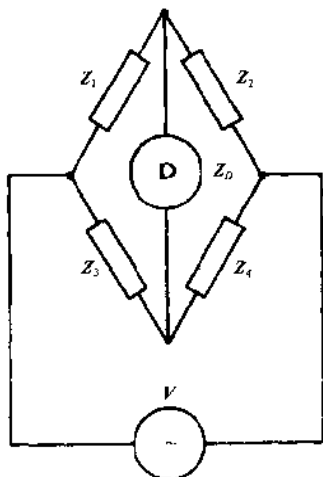


图 3-21

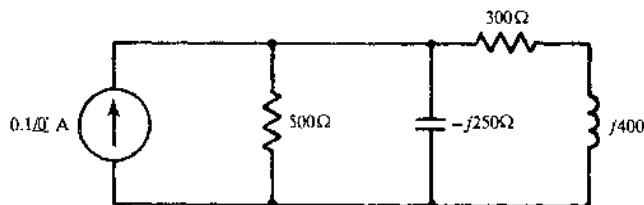


图 3-22

- 3.30 10<sup>①</sup> V 的电压源具有内阻抗  $0.1 + j0.1 \Omega$ , 向具有同样阻抗的负载供电。试计算负载吸收的功率。  
答 125W
- 3.31 75 $\Omega$  电阻与 10 $\mu$ F 电容并联连接。试求出一个等效的串联 RC 电路, 使在 1000rad/s 角频率时具有同样的阻抗。  
答  $R = 48\Omega$ ,  $C = 27.8\mu\text{F}$
- 3.32 电感线圈具有电阻 30 $\Omega$ , 但电感量是未知的。此线圈与 100 $\Omega$  电阻并联连接, 当跨接于 100V、60Hz 电源时, 此组合吸收 400W。试求电感的值。  
答 26.53mH
- 3.33 某并联 RC 电路在 120V 时消耗 480W 且具有 0.8 的滞后功率因数。希望用电容与此 RL 电路并联连接以达到全功率因数。如果电源频率为 60Hz, 试求所需电容的值。  
答 66.3 $\mu\text{F}$
- 3.34 试求使图 3-21 交流电桥中通过整流器 D 的电流为零时, 阻抗  $Z_1, \dots, Z_4$  之间的关系。(在此条件下电桥是平衡的。)  
答  $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$
- 3.35 证明在串联 RLC 谐振电路中总贮能是一常数(参看题 3.15)。由此计算  $Q_0$ 。  
答  $w(t) = \frac{1}{2} L i_m^2$ ,  $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$
- 3.36 对于串联或并联 RLC 电路之一, 计算出以品质因数  $Q$  (由题 3.35 或题 3.15) 和谐振频率  $\omega_0$  表示的半功率频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  (见图 3-11), 然后验证(3.34)。[提示: 仅需研究串联电路, 其结果按对偶性也将适用于并联电路。]  
答  $\omega_1 = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q} \right)^2} - \frac{1}{2Q} \right]$ ,  $\omega_2 = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q} \right)^2} + \frac{1}{2Q} \right]$
- 3.37 由题 3.36 导出  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ 。

① 原著中为 100。——译者注

3.38 三相网络示于图 3-23 中, 有相电压  $V_m = 120 \angle 0^\circ \text{V}$ 。试求 (a)  $I_a$ , (b)  $V_{a'n}$ , (c) 线路电阻中的总功率损耗, (d) 进入网络总功率。

答 (a)  $2 \angle -53.1^\circ \text{A}$ ; (b)  $124.96 \angle -2.9^\circ \text{V}$ ; (c)  $48 \text{W}$ ; (d)  $480 \text{W}$

3.39 将三相星形连接的电容与图 3-23 的负载并联连接以使这个组合呈纯电阻性。(a) 如果这个系统运行于  $60 \text{Hz}$ , 每相电容的值是多少? (b) 如果电压  $V_{a'n}$  像题 3.38 一样保持为  $124.96 \text{V}$ , 求电流  $I_a$ 。

答 (a)  $35.37 \mu\text{F}$ ; (b)  $1.2 \text{A}$

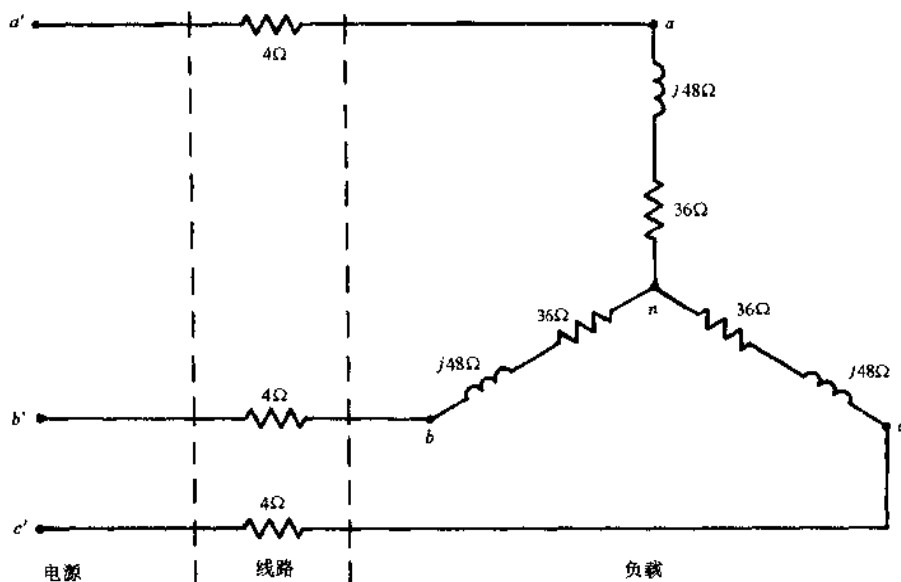


图 3-23

#### 4.1 引言

电网络中的电压和电流是与初始条件有关并且是随时间而变的情形,就是瞬变现象。只有在无限大时间的极限时,这些量才与初始条件无关(稳态)。在直流电路中,稳态值是与时间无关的常量。对于有正弦电源的交流电路,稳态值是恒定振幅的正弦量。

因为欧姆定律是时间无关的,纯电阻电路没有瞬变过程,电压或电流在每个瞬间都是它的稳态值。然而,电容元件或电感元件具有时间相关的  $v-i$  关系;由式(1.6)和式(1.7),对于  $C$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(u) du \quad (4.1)$$

对于  $L$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(u) du \quad (4.2)$$

因此,包含  $L$  或  $C$  的电路,在对于一些换路工作的响应中,将呈现瞬变过程。

#### 4.2 无电源电路的响应

现在研究图 4-1 的无电源  $RL$  电路。当激励(输入)为零时,响应(输出)就完全由初始电流  $I_0$  确定。用 KVL,有

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (4.3)$$

积分,

$$\int_{t_0}^t \frac{di}{i} = - \int_{t_0}^t \frac{R}{L} dt \text{ 或 } i = I_0 e^{-Rt/L} \quad (4.4)$$

现在用电容  $C$  替换图 4-1 的电感。电压响应  $v$  满足

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad (4.5)$$

式(4.5)的解是

$$v = V_0 e^{-t/RC} \quad (4.6)$$

式中  $V_0$  是电容两端的初始电压。

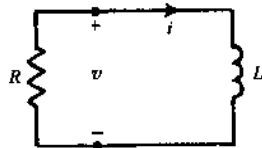


图 4-1

更经常将电路的无电源响应称为它的固有响应。如式(4.4)和式(4.6)所示,  $RL$  电路和  $RC$  电路的固有响应是稳态值为零的纯瞬态响应。从数学上讲,这是由于基本微分方程式(4.3)和式(4.5)是齐次的。式(4.4)中的量  $L/R$  具有量纲  $[T]$ ;它就是熟知的  $RL$  电路时间常数  $(\tau)$ 。时间常数越小,电流  $i$  的衰减就越快。类似地,  $RC$  电路中的电压衰减受时间常数  $\tau = RC$  的控制。

#### 4.3 电路的完全响应

当有了电源(交流或直流)时,电路的响应就由两个分量组成:具有瞬变特性的固有响应和稳态分量的强制响应。以数学形式,基本非齐次方程的解是余函数(对应齐次方程的解)与特殊积分之和。

**例 4.1** 求解图 4-2(a)  $RL$  电路中的电流,在  $t=0$  时接通开关,直流电源电压  $V$  施加于电

路。假定零初始条件(在  $t=0$  时  $i=0$ )。

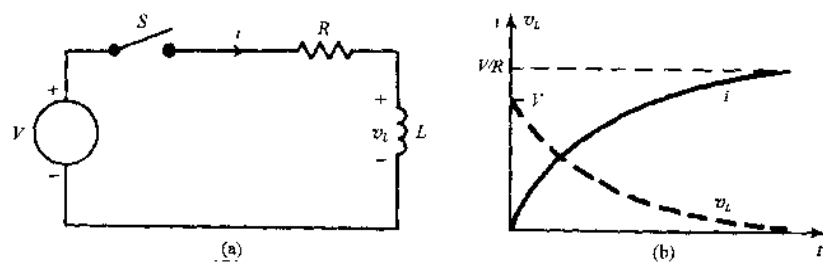


图 4-2

**解** 对这种情况, 将式(4.3)改为

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V \quad (4.7)$$

这可以分离变量求解, 如

$$\frac{L}{V - Ri} di = dt$$

积分得到

$$-\frac{L}{R} \ln(V - Ri) = t + A \quad (4.8)$$

用初始条件计算积分常数,

$$A = -\frac{L}{R} \ln V \quad (4.9)$$

将式(4.9)代入式(4.8), 将结果表达式化简得到

$$i = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (4.10)$$

观察电流完全响应式(4.10), 具有预想的形式:

$$i = i_n + i_f = -\frac{V}{R} e^{-Rt/L} + \frac{V}{R} \quad (4.11)$$

式中  $i_n$  是由式(4.4)与初始条件共同给出,  $i_f$  是式(4.7)的常数解。电流  $i$  以及电感电压  $v_L$  的图像画在图 4-2(b)中。

**例 4.2** 在图 4-3(a)中, 开关在  $t=0$  时接通,  $C$  上没有初始电荷, 求解  $i$  和  $v_C$ 。

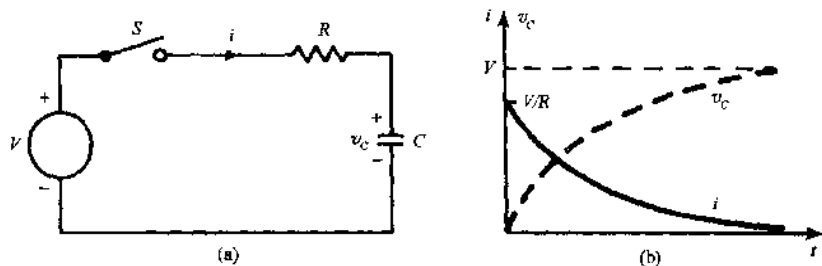


图 4-3

**解** 当  $t > 0$ , 由 KVL 给出

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = V$$

此式(因  $i = dq/dt$ )也可以写为

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V \quad (4.12)$$



注意式(4.12)与式(4.7)是相同形式的。仿照式(4.11),解成为

$$q = q_n + q_f = Q_0 e^{-t/RC} + CV \quad (4.13)$$

由初始条件,式中  $Q_0 = -CV$ , 于是

$$q = CV(1 - e^{-t/RC}) \quad (4.14)$$

由式(4.14)

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC}, \quad v_C = \frac{q}{C} = V(1 - e^{-t/RC})$$

在图 4-3(b)中描绘了这两个函数。

**例 4.3** 在  $t=0$  时接通开关, 电压  $V$  突然施加于图 4-4(a) 串联  $RLC$  电路, 试求电流响应。初始电流和  $C$  上初始电荷皆为零。

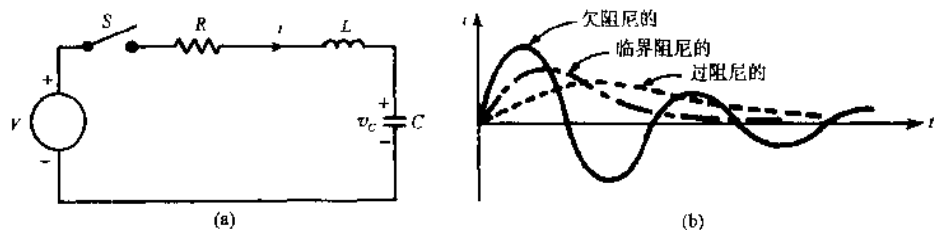


图 4-4

**解** 电压方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = V$$

或对时间求导数,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (4.15)$$

由于式(4.15)是齐次的,  $i_f = 0$ , 且

$$i = i_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.16)$$

式中  $s_1$  和  $s_2$  是式(4.15)的特征根:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha + \beta \\ s_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha - \beta \end{aligned} \quad (4.17)$$

又式中积分常数  $A_1$  和  $A_2$  可以由初始条件

$$i(0) = 0, \quad L \left. \frac{di}{dt} \right|_0 = V$$

求出(见题 4.7 和 4.8)。

因为  $\alpha$  永远是正实数, 瞬态电流(4.16)最后的量值衰减像是指数函数。这个衰减的更精确特点取决于电路参数  $R, L, C$ , 它们引入常数  $\beta$ 。定义电路的谐振频率(以 rad/s 计)  $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ , 因此

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

**情况 1:**  $\alpha > \omega_0$

这时  $\beta$  是正实数且  $\beta < \alpha$ 。解的形式为

$$i = A_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + A_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \quad (4.18)$$

即为两个衰减指数的和。这种情况的电路称做是过阻尼的。

情况 2:  $\alpha = \omega_0$

这可以表示为  $\beta \rightarrow 0$ , 式(4.16)改变为

$$i = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \quad (4.19)$$

这种电路称做是临界阻尼的。

情况 3:  $\alpha < \omega_0$

这时  $\beta$  是纯虚数,  $\beta = j|\beta|$ , 式(4.16)成为

$$i = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j|\beta|t} + A_2 e^{-j|\beta|t}) \quad (4.20)$$

或等效为(见题 4.21)

$$i = Ae^{-\alpha t} \sin(|\beta|t + \psi) \quad (4.21)$$

式(4.21)给出的这种响应是频率为  $|\beta|$  (rad/s) 的阻尼正弦波。这种电路是欠阻尼的。

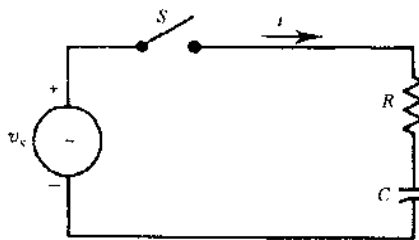


图 4-5

图 4-4(b) 绘出了三种阻尼的图样。在临界阻尼和欠阻尼情况中, 响应基本上是按  $e^{-\alpha t}$  趋至零,  $\alpha$  称为阻尼系数。

**例 4.4** 已知图 4-5 RC 电路的电源电压为  $v_s = V_m \cos(\omega t)$ , 开关在  $t = 0$  时接通。如  $v_c(0) = 0$ , 求电容电压  $v_c(t)$  的表达式。

**解** 将 KVL 应用于开关接通后 ( $t \geq 0$ ) 的图 4-5, 得到

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = v_s = V_m \cos(\omega t) \quad (4.22)$$

设定  $v_s = 0$ , 以求取式(4.22)中描述电流  $i$  的固有响应的微分方程, 取导数, 再整理成如下形式:

$$\frac{di_n}{dt} + \frac{1}{RC} i_n = 0 \quad (4.23)$$

仿照式(4.3), 得到式(4.23)的解

$$i_n = Ae^{-t/RC} \quad (4.24)$$

式中  $A$  是任意常数。用相量法求取式(4.22)的强制响应。应用频域的 KVL 导出

$$RI - j \frac{1}{\omega C} I = V_s = V_m \angle 0^\circ$$

或

$$I = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R - j1/\omega C} = \frac{V_m \angle -\theta}{Z} \quad (4.25)$$

式中

$$Z = \left[ R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ 和 } \theta = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{\omega RC} \right) \quad (4.26)$$

将式(4.25)变换到时域, 得到强制响应

$$i_f = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \theta) \quad (4.27)$$

式(4.24)与式(4.27)相加得出完全响应,

$$i(t) = i_n + i_f = Ae^{-t/RC} + \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \theta) \quad (4.28)$$

将式(3.16)应用于式(4.28), 得到所需的电容电压:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t id\tau = -RAe^{-t/RC} + \frac{V_m}{\omega CZ} \sin(\omega t - \theta) \quad (4.29)$$

用初始条件  $v_c(0) = 0$  计算式(4.29)的任意常数  $A$ 。

$$v_c(0) = 0 = -RA - \frac{V_m}{\omega CZ} \sin \theta$$

或

$$A = -\frac{V_m}{\omega RCZ} \sin \theta \quad (4.30)$$

## 例题解答

- 4.1 图 4-6 所示电路中的开关是长时间在位置 1。\$t=0\$ 时开关突然掷向位置 2。求 \$t>0\$ 时通过电容的电流 \$i(t)\$。

在换路瞬间,电容已充电到电池电压 20V。然后当 \$t>0\$ 时有

$$V_0 = 20\text{V}, RC = (500 \times 10^3)(500 \times 10^{-6}) = 250\text{s}$$

电容电压必定由(4.6)给出, \$v = 20e^{-t/250}(\text{V})\$, 从而通过电容的电流为

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} = (500 \times 10^{-6}) \left[ 20 \left( -\frac{1}{250} \right) e^{-t/250} \right] (\text{A}) \\ &= -40e^{-t/250} (\mu\text{A}) \end{aligned}$$

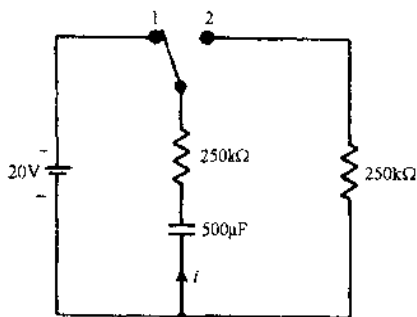


图 4-6

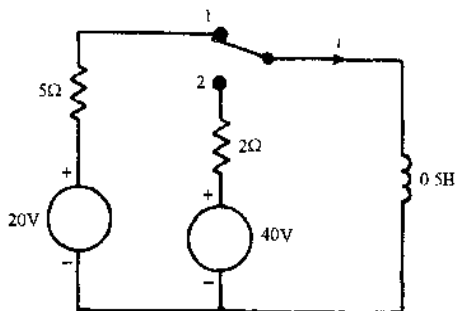


图 4-7

- 4.2 在图 4-7 的电路中,开关已经长时间处于位置 1。在 \$t=0\$ 时开关换至位置 2。对 \$t>0\$, 求解电感电流 \$i(t)\$。

用强制响应和固有响应的概念(4.3 节), 当 \$t>0\$ 时有

$$i(t) = i_f + i_n = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) + I_0 e^{-Rt/L}$$

式中 \$V=40\text{V}\$, \$R=2\Omega\$, \$L=0.5\text{H}\$, \$I\_0=20/5=4\text{A}\$, 于是, \$i(t)=20-16e^{-4t}(\text{A})\$。

- 4.3 试对于图 4-8 所示电路中的 \$i\$, 建立带初始条件的微分方程。图中的电源 \$V\$ 和 \$I\$ 是在 \$t=0\$ 同时接通的。在 \$t=0\_-\$, 电容是未充电的, 电感是未通电的。

当 \$t>0\$, 在节点 \$a\$, KCL 得出

$$i - C \frac{dv_C}{dt} + I = 0 \quad (1)$$

环绕左网孔, KVL 得出

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_C - V = 0 \quad (2)$$

在(2)的导数与(1)之间消去 \$dv\_C/dt\$, 得到

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -\frac{I}{C} \quad (3)$$

在 \$t=0\$ 时, 电容电压和电感电流必是连续的。于是, 加到(3)上的初始条件为

$$i(0) = 0, \quad L \left. \frac{di}{dt} \right|_0 = V \quad (4)$$

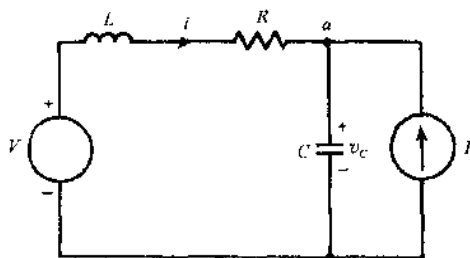


图 4-8

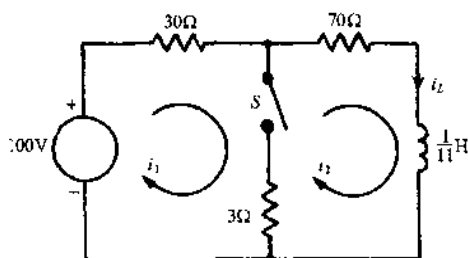


图 4-9

可以写出  $i = i_n + i_f$  来求解(3), 式中的  $i_n$  是由式(4.16)和式(4.17)给出, 而  $i_f = -I$ 。然后, 条件(4)可用于确定积分常数。

- 4.4 在图 4-9 电路中, 开关 S 代表电流工作继电器, 当  $i_L = 0.9\text{A}$  时其触点接通,  $i_L = 0.25\text{A}$  时触点断开。求继电器工作一个循环的时间周期。

令从开关断开的某时刻开始计算时间。于是电感电流以时间常数

$$\frac{L}{R} = \frac{1/11}{70 + 30} = \frac{1}{1100}\text{s}$$

自  $0.25\text{A}$  向  $100/(70 + 30) = 1\text{A}$  上升。这就是

$$i_L(t) = 1 - 0.75e^{-1100t}(\text{A})$$

这个电流在  $1100t_1 = \ln 7.5$  或  $t_1 = 1.83\text{ms}$  时升到  $0.9\text{A}$ 。在  $t_1$  瞬间 S 接通, 构成网孔电流为  $i_1$  和  $i_2 = i_L$  的二网孔电路。KVL 给出

$$33i_1 - 3i_2 = 100$$

$$73i_2 - 3i_1 + \frac{1}{11} \frac{di_2}{dt} = 0$$

或消去  $i_1$ , 得

$$\frac{di_2}{dt} + 800i_2 = 100 \quad (1)$$

满足初始条件  $i_2(t) = 0.9\text{A}$  时, (1) 的解是  $i_2(t) = i_L(t) = 0.125 + 0.775e^{-800(t-t_1)}$ 。这个电流在  $800(t_2 - t_1) = \ln 6.2$  或  $t_2 - t_1 = 2.28\text{ms}$  时衰减到  $0.25\text{A}$ , 因此继电器周期是  $t_2 = t_1 + 2.28 = 1.83 + 2.28 = 4.11\text{ms}$ 。

- 4.5 电感  $L$ 、电容  $C$ 、电阻  $R$  全并联连接。如果通过电感的初始电流为  $I_0$ , 电容上的初始电荷为  $Q_0$ , 试求出此电路以元件两端公共电压  $v(t)$  表示的固有响应特性。

当  $t > 0$ , KCL 给出

$$\frac{v}{R} + \left[ \frac{1}{L} \int_0^t v(u) du + I_0 \right] + C \frac{dv}{dt} = 0$$

或求时间导数,

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (1)$$

加上初始条件

$$v(0) = \frac{Q_0}{C}, \quad C \frac{dv}{dt} \bigg|_0 = - \left( \frac{Q_0}{RC} + I_0 \right) \quad (2)$$

方程(1)与串联  $RLC$  电路中固有电流的方程(4.15)有同样形式; 当然(1)与式(4.15)是对偶的(1.6节)。于是有解

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

式中

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \equiv \text{阻尼系数}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \text{谐振频率}$$

看到在对偶性方面谐振频率是不变的, 常数  $A_1$  和  $A_2$  可以由(2)进行计算。

- 4.6 研究初始电流为零的临界阻尼串联  $RLC$  电路(见图 4-4)的固有响应特性。如  $R = 5\Omega$  和  $L = 10\text{mH}$ , 求电流达到最大值的时间。

对于临界阻尼电路, 固有电流由式(4.19)给出:

$$i = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$$

由于  $t = 0$  时  $i = 0$ , 有  $A_1 = 0$  和  $i = A_2 t e^{-\alpha t}$ 。为了最大值  $i$ ,

$$\frac{di}{dt} = A_2 e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) = 0$$

由此

$$t = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R} = \frac{2(10 \times 10^{-3})}{5} = 4\text{ms}$$

- 4.7 图 4-4 的串联  $RLC$  电路是临界阻尼的。如  $R = 200\Omega$  和  $L = 100\text{mH}$ , (a) 求  $C$ 。(b) 在为零初始条件下, 开关在  $t = 0$  时接通, 如  $V = 100\text{V}$ , 求解电容端电压  $v_C(t)$ 。

■ (a) 临界阻尼的条件是  $\alpha^2 = \omega_0^2$ , 或

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

于是

$$C = \frac{4L}{R^2} = \frac{4(100 \times 10^{-3})}{(200)^2} = 10 \mu\text{F}$$

(b) 由式(4.19), 电路中的电流为

$$i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \quad \left(\text{其中 } \alpha = \frac{R}{2L} = 1000 \text{ s}^{-1}\right)$$

在  $t=0$  时,  $i=0$  且  $di/dt = V/L = 1000 \text{ A/s}$ ; 于是,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1000 \text{ A/s}, \quad i(t) = 1000te^{-1000t} (\text{A})$$

则

$$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = \frac{1}{10 \times 10^{-6}} \int_0^t 1000ue^{-1000u} du \\ &= 100[1 - e^{-1000t}(1 + 1000t)] (\text{V}) \end{aligned}$$

- 4.8 图 4-4 电路的参数使电路是欠阻尼的, 具有零初始条件, 开关在  $t=0$  时接通。(a) 求电容端电压的表达式。(b) 因为电路是欠阻尼的,  $C$  的端电压将经历(衰减)振荡。求电容电压出现第一个最大值的时间。在这个瞬间, 电压的值是多少?

■ (a) 将初始条件应用到式(4.21), 得到

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 = A \sin \phi \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_0 &= \frac{V}{L} = A(-\alpha \sin \phi + |\beta| \cos \phi) \end{aligned}$$

这意味着  $\sin \phi = 0$  和  $A \cos \phi = V/L|\beta|$ 。式(4.21)就成为

$$i(t) = \frac{V}{L|\beta|} e^{-\alpha t} \sin |\beta| t$$

由此, 利用

$$\alpha^2 + |\beta|^2 = \omega_0^2 \equiv \frac{1}{LC}$$

得到

$$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = V \left[ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{|\beta|} (\alpha \sin |\beta| t + |\beta| \cos |\beta| t) \right] \\ &= V \left[ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \phi} \sin(|\beta| t + \phi) \right] \end{aligned}$$

式中新的相位角  $\phi$  定义为

$$\cos \phi \equiv \frac{\alpha}{\omega_0}$$

(b) 在(a)中找到  $i = C(dv_C/dt)$  的表达式, 由此  $v_C(t)$  曲线在  $t = \pi/|\beta|$  时有第一个最大值。有

$$v_C(\pi/|\beta|) = V \left[ 1 - \frac{e^{-\alpha\pi/|\beta|}}{\sin \phi} \sin(\pi + \phi) \right] = V(1 + e^{-\pi\alpha/|\beta|})$$

- 4.9 计算题 4.8 中电容电压的过冲百分率。

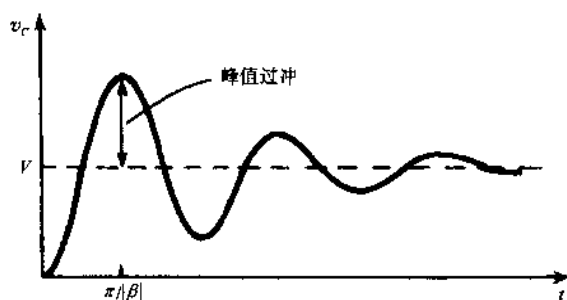


图 4-10

■ 在图 4-10 中描绘了函数  $v_C(t)$ 。看到电压对其稳态值的最大偏差出现在  $t = \pi/|\beta|$ 。将这个

峰值过冲表示为分数,

$$\text{过冲百分率} \equiv \frac{v_c(\pi/(1-\beta))}{V} \times 100\% \approx 100e^{-\pi \cos \varphi}$$

4.10 对于题 4.8 的电路,  $V = 100\text{V}$ ,  $R = 200\Omega$ ,  $L = 100\text{mH}$ 。欲使峰值过冲为 5%, 试计算  $C$ 。

由题 4.9, 有

$$100e^{-\pi \cos \varphi} = 5 \text{ 或 } \cot \varphi = \frac{\ln 20}{\pi} = 0.954$$

于是  $\cos \varphi = \alpha/\omega_0 = 0.690$ 。对这个电路

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{200}{2(100 \times 10^{-3})} = 1000\text{s}^{-1}$$

而

$$\frac{1}{\omega_0^2} - \left(\frac{0.690}{1000}\right)^2 = 4.76 \times 10^{-7} = LC$$

由此

$$C = \frac{4.76 \times 10^{-7}}{100 \times 10^{-3}} = 4.76\mu\text{F}$$

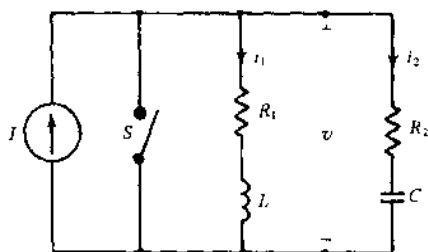


图 4-11

4.11 当图 4-11 中电容电荷和电感电流皆为零, 在  $t = 0$  时开关 S 突然断开。试建立节点电压  $v$  的微分方程, 并表示出对应的初始条件。

当  $t > 0$ , 有

$$i_1 + i_2 = I \quad (1)$$

$$v = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

$$v = R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt \quad (3)$$

它们的一阶和二阶导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} &= 0, \quad \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = R_1 \frac{di_1}{dt} + L \frac{d^2 i_1}{dt^2} \\ \frac{dv}{dt} &= R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} i_2, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = R_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

方程(1)、方程(2)和五个方程(4)组成一个系统, 从中可将  $i_1$ 、 $i_2$ 、它们的一阶导数和二阶导数全都消去, 给出

$$L \frac{d^2 v}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C} v = \frac{R_1 I}{C} \quad (5)$$

这就是寻求的方程。

求(5)的初始条件, 注意在  $t = 0_+$ , 电容电压为零且  $i_2 = I$ ; 得

$$v(0_+) = R_2 I \quad (6)$$

并且(2)成为

$$R_2 I = L \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0+}$$

由(4)的第四方程和(1)给出

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0+} = -R_2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0+} + \frac{I}{C}$$

这两个关系式意味着

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{0+} = \left( \frac{1}{C} - \frac{R_2^2}{L} \right) I \quad (7)$$

数值应用见题 4.29。

4.12 假定戴维南定理和诺顿定理可应用于含电感和(或)电容的电路。(a)用戴维南等效电路表示有初始电荷  $Q_0$  的电容  $C$ ; (b)用诺顿等效电路表示有初始电流  $I_0$  的电感  $L$ 。

图 4-12(a) 电容的开路端电压是  $V_0 = Q_0/C$ 。然后, 戴维南电路成为如图 4-12(b) 中所示, 图中的电容是初始未充电的。

(b) 见图 4-13; 图 4-13(b) 中  $L$  的初始电流为零。

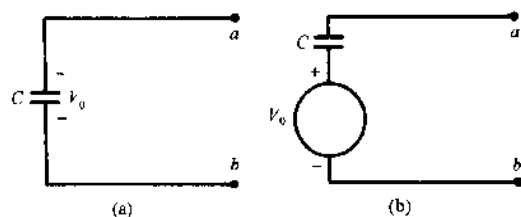


图 4-12

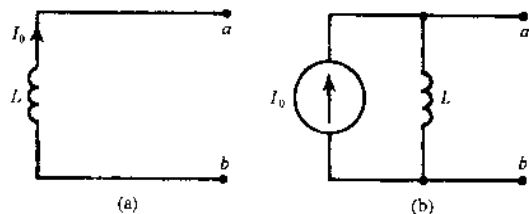


图 4-13

- 4.13 图 4-14(a) 中所示网络的开关  $S$  已经长时间接通。在  $t=0$  时开关突然断开。计算  $200\Omega$  电阻的端电压。

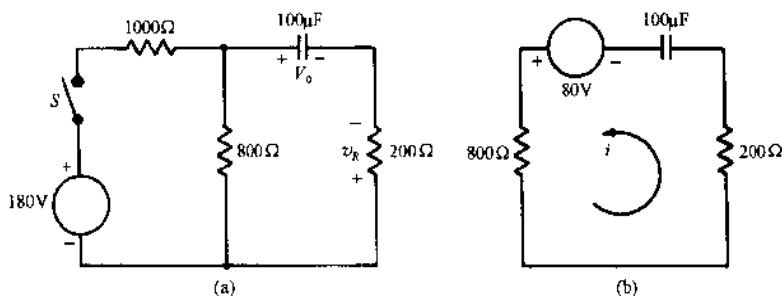


图 4-14

在  $S$  断开前, 网络处于稳态而电容充电到电压  $V_0$ 。这个电压与  $800\Omega$  电阻的端电压相同; 于是由电压分配,

$$V_0 = \frac{800}{1800} \times 180 = 80\text{V}$$

由题 4.12(a) 论点, 这个电路在  $t>0$  时可以表示为图 4-14(b), 有

$$800i + 200i + \frac{1}{100 \times 10^{-6}} \int_0^t i dt = 80$$

这个方程在前面的例 4.2 中已经解过。因此

$$i = \frac{80}{1000} e^{-t/(1000)(100 \times 10^{-6})} \text{ (A)}$$

$200\Omega$  的端电压成为

$$v = 200i = 16e^{-10t} \text{ (V)}$$

- 4.14 图 4-15(a) 网络的开关在  $t=0$  时突然断开; 在这之前网络处于稳态。求在  $t>0$  时  $6\Omega$  电阻的端电压。

在  $t<0$  时电感中的电流可以证明是  $2\text{A}$ 。应用题 4.12(b), 这个电路在  $t>0$  时成为如图 4-15(b) 所示, 对它有

$$2 = \frac{v}{9} + \frac{1}{0.1} \int_0^t v dt \quad (1)$$

(1)的解是

$$v = 18e^{-90t} \text{ (V)}$$

因此  $6\Omega$  电阻的端电压成为

$$v_{6\Omega} = \frac{6}{9}(18e^{-90t}) = 12e^{-90t} \text{ (V)}$$

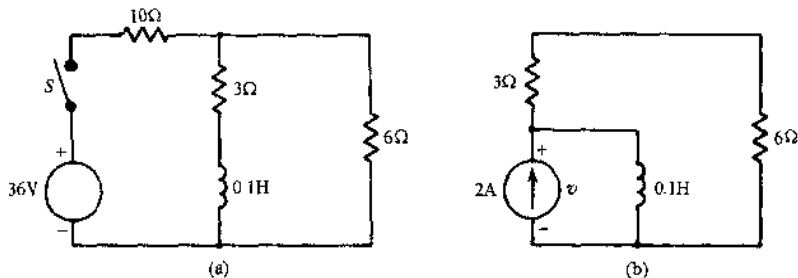


图 4-15

4.15 对于图 4-5 的电路, 令  $R=1\Omega$ ,  $C=1000\mu\text{F}$ ,  $V_m=10\text{V}$ , 电源频率  $\omega=1000\text{s}^{-1}$ 。如果电容在  $t=0$  时是未充电的, 求在  $t\geq 0$  时描述  $i(t)$  的表达式。

用式(4.26)和式(4.30),

$$Z = [R^2 + (1/\omega C)^2]^{1/2} = \left[1^2 + \frac{1}{(1000)(1000 \times 10^{-6})}\right]^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[-\frac{1}{\omega RC}\right] = \tan^{-1}\left[-\frac{1}{(1000)(1)(1000 \times 10^{-6})}\right] = -45^\circ$$

$$A = -\frac{V_m}{\omega RCZ} \sin\theta = -\frac{10}{(1000)(1)(1000 \times 10^{-6})(\sqrt{2})} \sin(-45^\circ) = 5$$

还有

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{(1)(1000 \times 10^{-6})} = 1000$$

将结果代入式(4.28), 得到

$$i(t) = 5e^{-1000t} + 7.07\cos(1000t + 45^\circ) \text{ A} \quad (1)$$

4.16 题 4.15 的数值可应用于图 4-5 的电路。绘制  $t\geq 0$  时电流  $i$  和电容电压  $v_C$  的略图。

将题 4.15 得到的  $Z$ 、 $A$ 、 $1/RC$ 、 $\theta$  的数值代入式(4.29)得

$$v_C(t) = -(1)(5)e^{-1000t} + \frac{10}{(1000)(1000 \times 10^{-6})(\sqrt{2})} \sin(1000t + 45^\circ)$$

$$v_C(t) = -5e^{-1000t} + 7.07\sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

电流  $i(t)$  由题(4.15)的(1)给出。见图 4-16 绘制的略图。

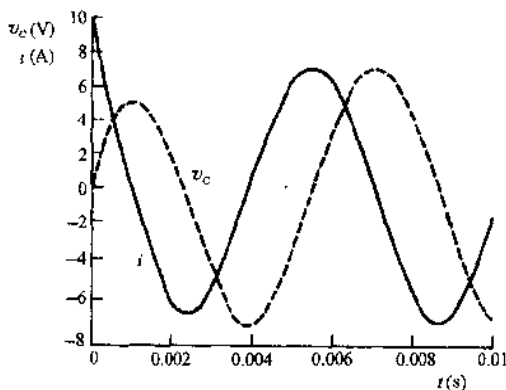


图 4-16

4.17 列出以  $v_C$  为独立变量的描述微分方程来解答例 4.4。

根据式(1.6),



$$i = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1)$$

将 KVL 应用到图 4-5 的电路并用(1),

$$Ri + v_C = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_S = V_m \cos(\omega t) \quad (2)$$

对于固有响应,(2)的齐次解为

$$v_{Cn} = Ae^{-t/RC} \quad (3)$$

用式(4.25)得(2)的强制响应相量形式为

$$\mathbf{V}_C - \mathbf{Z}_C \mathbf{I} = \left( \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \right) \frac{V_m \angle -\theta}{Z} = \frac{V_m}{\omega CZ} \angle -90^\circ - \theta \quad (4)$$

将(4)变换到时域给出

$$v_{Cf} = \frac{V_m}{\omega CZ} \cos(\omega t - 90^\circ - \theta) = \frac{V_m}{\omega CZ} \sin(\omega t - \theta) \quad (5)$$

(3)①与(5)相加构成完全响应,然后计算任意常数  $A$ 。

$$v_C(t) = v_{Cn} + v_{Cf} = Ae^{-t/RC} + \frac{V_m}{\omega CZ} \sin(\omega t - \theta)$$

$$v_C(0) = 0 = A - \frac{V_m}{\omega CZ} \sin \theta$$

**4.18** 图 4-17RL 电路中的开关在  $t=0$  时接通。已知电源电压为  $v_S = V_m \cos(\omega t)$ 。看到  $i(0)=0$ ,求  $t \geq 0$  时电流  $i(t)$  的表达式。

当  $t \geq 0$  时应用 KVL,得到

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_S = V_m \cos(\omega t) \quad (1)$$

固有响应[设定(1)中的  $v_S=0$ ]为

$$i_n = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (2)$$

用相量法确定(1)的强制响应。将 KVL 应用于频域,结果是

或

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{V}_S = V_m \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L} = \frac{V_m}{Z} \angle -\theta \quad (3)$$

式中

$$Z = [R^2 + (\omega L)^2]^{1/2} \text{ 和 } \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \quad (4)$$

将(3)变换到时域并将结果加到(2)上,构成完全响应:

$$i(t) = i_n + i_f = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \theta) \quad (5)$$

将初始条件应用到(5),供计算任意常数用:

$$i(0) = 0 = A + \frac{V_m}{Z} \cos \theta$$

或

$$A = -\frac{V_m}{Z} \cos \theta$$

因此

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} [\cos(\omega t - \theta) - e^{-\frac{R}{L}t} \cos \theta]$$

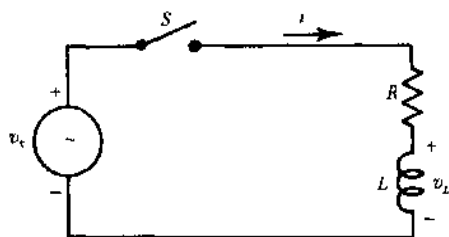


图 4-17

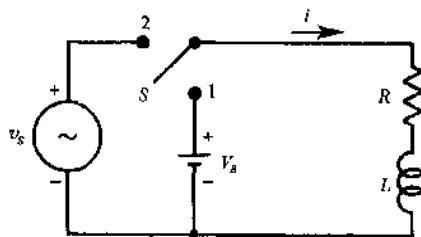


图 4-18

① 原著中为(4)。——译者注

- 4.19 图 4-18 中  $RL$  电路的开关已经长时间处在位置 1, 当  $t=0$  时它突然移动至位置 2。如果  $v_S = V_m \cos(\omega t)$ , 试求  $i(t), t \geq 0$  的表达式。

在  $t=0$  之前(开关处在位置 1), 电流已经达到直流稳态值, 因此  $i(0) = V_B/R$ 。  $t \geq 0$  时的描述微分方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_S = V_m \cos(\omega t) \quad (1)$$

如题 4.18 中给出完全响应一样, (1) 的正确解答为

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \theta) \quad (2)$$

应用初始条件  $i(0) = 0$ , 得出(2)中任意常数的值:

$$i(0) = \frac{V_B}{R} = A + \frac{V_m}{Z} \cos \theta$$

或

$$A = \frac{V_B}{R} - \frac{V_m}{Z} \cos \theta \quad (3)$$

因此

$$i(t) = \frac{V_B}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{Z} [\cos(\omega t - \theta) - e^{-\frac{R}{L}t} \cos \theta] \quad (4)$$

(4) 式右端的第一项通常称为初始条件响应。

### 补充习题

- 4.20 已知  $20\mu\text{F}$  电容的端电压为

$$v_C = 10.75 - 1.5e^{-1000t} + 0.75e^{-2000t} \text{ (V)}$$

通过电容的电流是什么?

答  $0.03(e^{-1000t} - e^{-2000t}) \text{ (A)}$

- 4.21 图 4-3(a) 电路中,  $V=100\text{V}$ ,  $R=5000\Omega$ ,  $C=400\mu\text{F}$ ;  $S$  在  $t=0$  时接通。(a) 求电阻中消耗的瞬时功率表达式。(b) 电容吸收的瞬时功率是什么? (c) 在什么时候供给电容的功率达到最大值? (d) 求在(c)中所得瞬间的电容端电压。

答 (a)  $2e^{-t} \text{ (W)}$ ; (b)  $2(e^{-0.5t} - e^{-t}) \text{ (W)}$ ; (c)  $t=1.39\text{s}$ ; (d)  $50\text{V}$

- 4.22 关于图 4-7 的电路。假定开关已长时间在 2, 然后在  $t=0$  时换至 1。求电感两端的电压。

答  $120e^{-10t} \text{ (V)}$

- 4.23 图 4-19 中所示电路的开关在  $t=0$  时接通, 当时电容上没有电荷。计算(a)通过电容的电流, (b)电容的端电压。

答 (a)  $5e^{-400t} \text{ (A)}$ ; (b)  $250(1 - e^{-400t}) \text{ (V)}$

- 4.24 图 4-20 电路的开关在  $t=0$  时接通。没有通过电感的初始电流, 试求  $6\Omega$  电阻的瞬时端电压。

答  $6 + 4e^{-30t} \text{ (V)}$

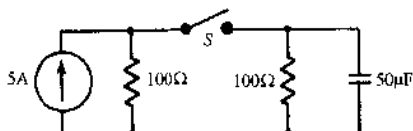


图 4-19

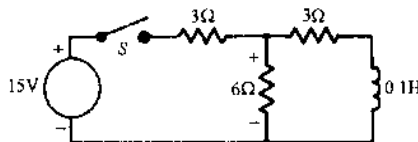


图 4-20

- 4.25 图 4-21 中所示电路的电感中没有初始储能, 开关在  $t=0$  时接通。计算(a)电源电流, (b)电感的端电压。

答 (a)  $2.5(2 - e^{-15t}) \text{ (A)}$ ; (b)  $120e^{-15t} \text{ (V)}$

- 4.26 把式(4.20)推导为式(4.21)的形式。

答  $i$  必定是实数, 式(4.20)中的  $A_1$  和  $A_2$  就必须是共轭复数。由此

$$A = 2 |A_1| = 2 |A_2|, \quad \phi \equiv \frac{\pi}{2} + \arg A_1 = \frac{\pi}{2} - \arg A_2$$

- 4.27  $20\text{mH}$  电感和  $50\mu\text{F}$  电容的并联组合与电阻  $R$  并联连接。问  $R$  值多大时这个电路才是临界阻尼的?

答  $10\Omega$

4.28 题 4.7<sup>①</sup> 电路中  $R$  的值改为  $100\Omega$ 。验证此电路现在是欠阻尼的。试求(a)阻尼系数,(b)谐振频率。

答 (a)  $500\text{s}^{-1}$ ; (b)  $1000\text{rad/s}$

4.29 对于题 4.7 的数据和电路,求要多长时间电容端电压达到它终极值的 5% 范围内。

答  $5\text{ms}$ (近似)

4.30 对于题 4.10 的电路和数据,求电容端电压达到它终极值 5% 范围内的时间。

答  $2\text{ms}$ (近似)

4.31 证明无论  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  取什么值,图 4-22 电路都不能有衰减振荡。特别证明  $i_2$  决不能有衰减振荡的形式。

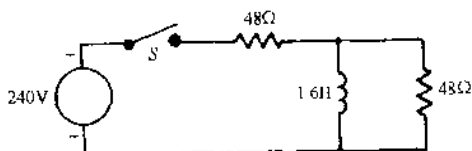


图 4-21

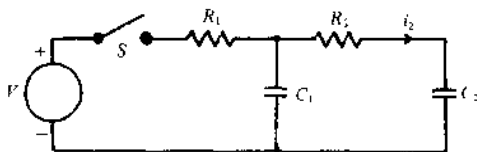


图 4-22

4.32 将图 4-22 电路中的电容都换成电感。证明电流  $i_2$  决不能有衰减振荡的形式。

4.33 图 4-11 所示电路有  $I = 1.0\text{A}$ ,  $L = 100\text{mH}$ ,  $C = 17.78\mu\text{F}$ ,  $R_1 = 90\Omega$ ,  $R_2 = 0\Omega$ 。当开关突然断开且初始条件为零时,求  $i_1$ 。

[提示:导出微分方程  $L \frac{d^2 i_1}{dt^2} - (R_1 + R_2) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} i_1 = \frac{I}{C}$ , 当  $t > 0$ 。]

答  $1.0 + 1.25e^{-450t} \sin(600t - 127^\circ) (\text{A})$

4.34 图 4-11 所示电路的参数值是:  $R_1 = 60\Omega$ ,  $R_2 = 90\Omega$ ,  $L = 100\text{mH}$ ,  $C = 17.78\mu\text{F}$ 。当为零初始条件时,  $1.0\text{A}$  电源突然加入,试求节点电压  $v_c$ 。

答  $v = 30[2 + (1 - 75t)e^{-750t}] (\text{V})$

4.35 在图 4-15(a) 电路中用短路替换  $3\Omega$  电阻。当  $t < 0$  时电路处于稳态;开关在  $t = 0$  时断开。求当  $t > 0$  时通过  $6\Omega$  电阻的电流。

答  $3.6e^{-0.6t} (\text{A})$

4.36 图 4-23 网络中的开关已经是长时接通;在  $t = 0$  时开关突然断开。试求解  $t > 0$  时的电压  $v$ 。

答  $4e^{-0.1t} (\text{V})$

4.37 如果  $v_c(0) = V_0$  且其他都不改变,试求解例 4.4。

答  $v_c(t) = \left\{ V_0 + \frac{V_m \sin \theta}{\omega C Z}; e^{-t/RC} + \frac{V_m}{\omega C Z} \sin(\omega t - \theta) \right\}, t \geq 0$

4.38 如果  $v_s = V_m \sin(\omega t)$  且其他都不改变,再求解例 4.4。

答  $v_c(t) = -V_m \tan \theta [e^{-t/RC} + \cos(\omega t - \theta)]$ , 式中  $\theta = \tan^{-1}(-1/\omega RC)$

4.39 试求题 4.17 的  $v_L$ 。

答  $v_L(t) = \frac{V_m}{Z} \left[ \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cos \theta - \omega \sin(\omega t - \theta) \right]$

4.40 对于图 4-17 中的  $RL$  电路,令  $R = 1\Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$ ,  $V_m = 50\text{V}$ ,  $\omega = 1000\text{s}^{-1}$ 。如果开关在  $t = 0$  时接通,且  $v_s$

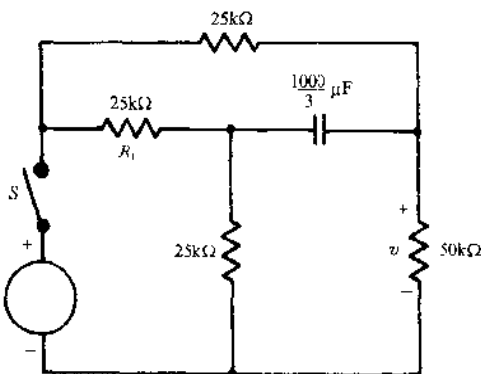


图 4-23<sup>②</sup>

① 原著中为“题 4.8”。——译者注

② 原著图中  $R_1$  为  $20\text{k}\Omega$ , 电容为  $\frac{100}{3}\mu\text{F}$ 。——译者注

$= V_m \cos \omega t$ , 试求  $t \geq 0$  时  $i(t)$  的表达式。

答  $i(t) = 35.355 \cos(1000t - 45^\circ) - 25e^{-1000t} \text{ A}$

- 4.41 对于图 4-18 的电路, 假定开关已经是长时间处于位置 2, 在  $t=0$  时它突然移动到位置 1。令  $v_S = V_m \cos(\omega t)$ 。求  $i(t), t \geq 0$  的表达式。

答  $i(t) = \frac{V_m}{Z} \cos \theta + \frac{V_B}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ , 此式中  $\theta$  和  $Z$  由题 4.18 的(4)给出。

- 4.42 在图 4-4(a) 的串联  $RLC$  电路中, 用正弦电源  $v_S = 100 \sin(120\pi t) \text{ V}$  替换直流电源  $V$ 。当  $R = 200 \Omega$  和  $L = 100 \text{ mH}$  时电路是临界阻尼的。假定零初始条件, 试求电流  $i(t)$  的表达式。

答  $i(t) = (-0.248 + 330.12t)e^{-1000t} + 0.33 \cos(120\pi t - 41.31^\circ) \text{ A}$

## 5.1 特殊强制函数

在前面章节中已经遇到两种最普通的强制函数——直流源和正弦交流源(当时仅考虑稳态)。这里将要研究三种特殊类型的强制函数,虽然不常在实际上实现,但是它们提供了对电路和系统的理解。

在图 5-1(a)中绘制了单位斜坡源  $r(t)$ ;解析表示为

$$r(t) = \begin{cases} t & (t \geq 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \quad (5.1)$$

如果斜坡是时间平移的,如图 5-1(b)所示,解析形式就成为

$$r(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & (t \geq t_0) \\ 0 & (t \leq t_0) \end{cases} \quad (5.2)$$

注意单位斜坡具有单位斜率。

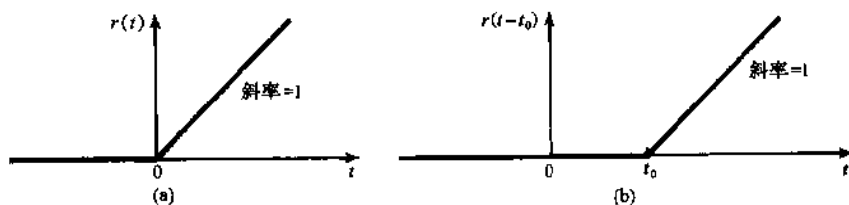


图 5-1

在图 5-2(a)中绘制的单位阶跃源  $u(t)$  由

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (5.3)$$

给出。图 5-2(b)表示了平移单位阶跃

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & (t > t_0) \\ 0 & (t < t_0) \end{cases} \quad (5.4)$$

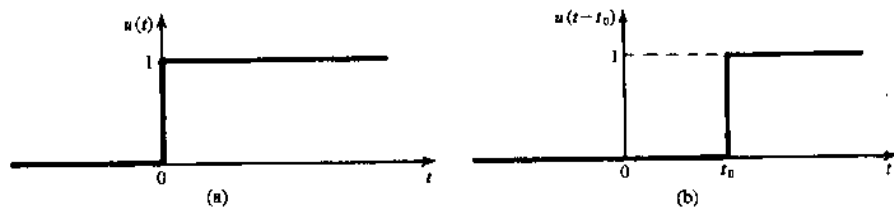


图 5-2

比较图 5-1 和图 5-2,可观察到除了  $t = 0$  以外对全部  $t$  值,

$$u(t) = \frac{d}{dt}[r(t)] \quad (5.5)$$

并且对全部  $t$  值,

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

为了理解单位冲激的概念,设想一个持续期为  $T$  而幅度为  $1/T$  的脉冲。这个脉冲范围内的“面积”是一单位。如果减小脉冲持续期,相反地增大幅度[图 5-3(a)],可以保持这个单位

面积不变。在脉冲持续期趋于零的极限情况,得到单位冲激源  $\delta(t)$ , 在图 5-3(b) 中用“尖峰”表示。函数  $\delta(t)$  也称为  $\delta$  函数。在数学上,  $\delta(t)$  定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1, \text{ 当 } t \neq 0 \text{ 时 } \delta(t) = 0 \quad (5.7)$$

在平移  $\delta$  函数  $\delta(t - t_0)$  中, 奇异点出现在  $t = t_0$ 。从物理现象上, 单位冲激源是量值很大但持续期很短的一种输入的近似, 例如锤击。单位冲激的两个重要性质如下: (1) 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = f(t_0) \quad (5.8)$$

观察到,  $\delta(\tau - t_0)$  挑选出  $f(\tau)$  在  $\tau = t_0$  时的值。这就是  $\delta$  函数的筛分性; (2) 单位冲激强制函数产生出系统中的固有响应, 如在例 5.3 中将要见到的。

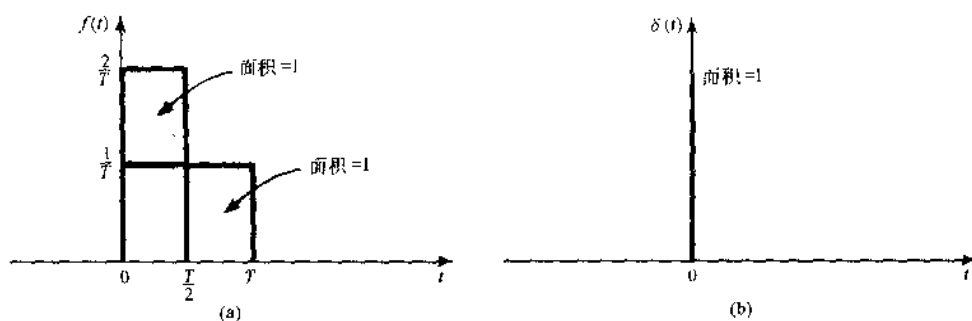


图 5-3

## 5.2 斜坡响应、方脉冲响应、冲激响应

我们知道电路的完全响应由瞬态响应和稳态响应两部分构成。瞬态响应是电路对初始激励的固有响应, 它是与电源无关的。所以, 为了求出电路对已知电源的响应, 仅需求出对电源的稳态响应。当稳态解得出后, 将之与瞬态解的一般形式相加, 然后由初始条件(应用到两部分的和)计算瞬态解中的未知常数。

**例 5.1**  $1\text{M}\Omega$  的电阻与  $5\mu\text{F}$  电容串联连接。斜坡电压  $r(t) = \max\{0, 2t\}$  (V) 施加于此电路, 求电路电流  $i(t)$ 。

**解** 由 4.2 节, 电路方程

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dr(t)}{dt}$$

有瞬态解

$$i_n = Ae^{-t/RC} = Ae^{-t/5} \text{ (A)}$$

当  $t > 0$  时,  $dr/dt = 2\text{V/s}$ , 用观察法知稳态解是

$$i_f = 2C = 10^{-5} \text{ A}$$

对完全解  $i = i_n + i_f$ , 应用初始条件  $i(0_+) = 0$ , 得  $A = -10^{-5} \text{ A}$ ; 因此

$$i(t) = 10^{-5}(1 - e^{-t/5}) \text{ (A)}$$

斜坡信号在表征某些类型的反馈控制系统方面特别有用(见第 17 章)。

方脉冲是在电路研究中遇到的一种普通信号, 已表示在图 5-3(a) 中, 又重画在图 5-4(a) 中。注意这个脉冲可以用一个正阶跃和一个延迟负阶跃合成, 如图 5-4(b) 中的图样。于是电路对脉冲的响应成为对这两个阶跃函数响应的叠加。

**例 5.2** 研究例 5.1 的 RC 电路。试求  $100\text{V}$  及  $1\text{s}$  持续期的电压脉冲产生的电流。

**解** 参考图 5-4(b), 有  $V = 100\text{V}$ ,  $t_0 = 1\text{s}$ 。两个电压阶跃都产生零稳态电流; 因而当  $t > 0$  时电流完全响应是两个瞬态电流的叠加:

$$i = Ae^{-t/RC} + Be^{-(t-t_0)/RC} u(t - t_0)$$

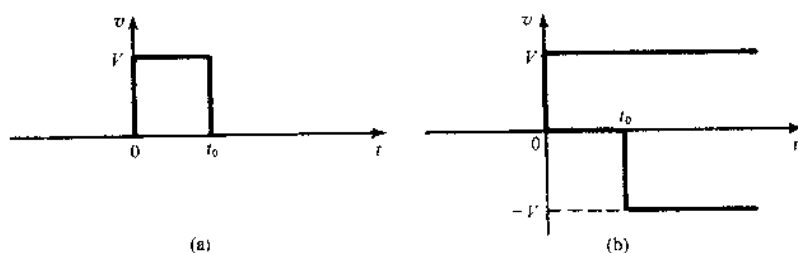


图 5-4

$$= Ae^{-t/5} + Be^{-(t-1)/5} u(t-1) (\text{A})$$

[因子  $u(t-1)$  使第二项瞬态电流在  $0 < t < 1\text{s}$  区间中成为零。]由初始条件  $i(0_+) = V/R$ , 和在  $t = 1\text{s}$  时电容电压的连续性确定常数  $A$  和  $B$ 。于是

$$A = \frac{V}{R} = 10^{-4} \text{A}$$

和

$$v = Ri + v_C$$

$$\Delta v|_{t=1} = R\Delta i|_{t=1} + 0$$

$$-V = R \cdot B$$

$$B = -\frac{V}{R} = -10^{-4} \text{A}$$

现在解答成为

$$i = 10^{-4} e^{-t/5} [1 - e^{1/5} u(t-1)] (\text{A}) \quad (t > 0)$$

形式。图 5-5 中画了这个函数的略图。

**例 5.3** 冲激电压  $V\delta(t)$  V 施加于串联  $RL$  电路。试求电路的电流  $i(t)$ 。

**解** 电路方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V\delta(t)$$

由此

$$L \int_{0-}^{0+} \frac{di}{dt} dt + R \int_{0-}^{0+} i dt = V \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt$$

$$Li(0+) + 0 = V \cdot (1\text{s})$$

以后电流  $i(t)$  在  $t=0$  附近保持有界。于是, 得  $i(0+) = V \cdot (1\text{s})/L$ , 且电流有

$$i(t) = \frac{V \cdot (1\text{s})}{L} e^{-Rt/L} \quad (t > 0)$$

形式, 就是串联  $RL$  电路的固有响应。从物理上, 这个符合于在电路的贮能元件中冲激(瞬时地)贮能的那种事实。然后这一贮能在电阻中消耗, 其过程就是固有响应。

### 5.3 拉普拉斯变换

至此, 我们用经典的方法解微分方程或解积分微分方程, 已经求得时域的电路量。拉普拉斯变换提供了另外的求解方法。为此目的, 只需定义函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.9)$$

当  $t \leq 0$  时式中  $f(t) \equiv 0$ 。在 (5.9) 中, 复变量  $s = \sigma + j\omega$ ,  $\sigma$  选择得足够大以使这个无限积分收敛。

**例 5.4** 已知  $f(t) = -e^{-at}$  ( $a > 0$ ), 求  $F(s)$ 。

**解** 代入 (5.9) 中得到

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s} e^{-at} dt = \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

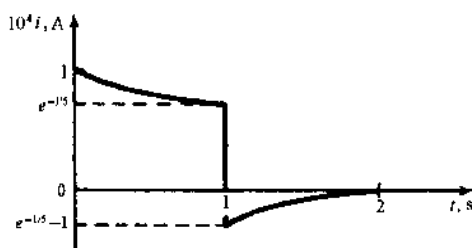


图 5-5

为了使式中的指数在积分上限时趋于零,已经假定了  $\sigma > -a$ 。然而,对这个限制可以置之不理,并且可以认为结果  $F(s) = \frac{1}{s+a}$  在整个  $s$  复平面上有效。

下面的拉普拉斯变换表对我们的工作将是足够的。第 10~16 行表示拉普拉斯变换的一般性质;第 14 行,卷积定理,在由  $s$  域的一个复合表达式求出对应的时间函数方面经常是有用的。

表 5-1 拉普拉斯变换对

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$a$	$\frac{a}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
9	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10	$\frac{d}{dt}[f(t)]$	$sF(s) - f(0+)$
11	$\frac{d^2}{dt^2}[f(t)]$	$s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)$
12	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
13	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
14	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
15	$f(\infty)$ (终值)	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
16	$f(0+)$ (初值)	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

**例 5.5** 在  $t=0$  时,未通电的串联  $RL$  电路突然跨接于直流电压源  $V$ 。试用拉普拉斯变换法求电路电流(当  $t>0$ )。

**解** 现在提出分一系列步骤的解法,下面是对任何电路问题都适用的方法。

第一步:写基本方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V \quad (t > 0) \quad (1)$$

第二步:进行(1)的拉普拉斯变换

用表 5-1 的第 10 行且  $i(0+) = 0$ , 还有第 2 行, 得到

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{V}{s} \quad (2)$$

第三步:求解(2)的未知变换

$$I(s) = \frac{V}{s(Ls + R)} \quad (3)$$



第四步:进行(3)的拉普拉斯反变换

写为

$$I(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{V/L}{s + (R/L)}$$

由表 5-1 的第 4 行,有

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{V/L}{s + (R/L)}\right\} = \frac{V}{L}e^{-Rt/L}$$

然后由第 12 行,有

$$i(t) = \int_0^t \frac{V}{L}e^{-R\tau/L}d\tau = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

如果用第 14 行[取  $G(s) = 1/s$ ]或用部分分式的方法进行  $I(s)$  的反变换,将得到  $i(t)$  的同样结果。

## 例题解答

5.1 以单位阶跃函数的形式表达图 5-6 的正弦脉冲。

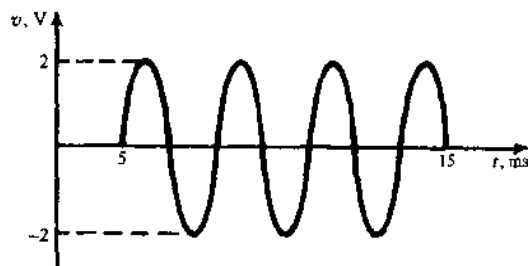


图 5-6

正弦波在 10ms 内有 7 个半周期,即

$$\frac{7T}{2} = 10^{-2} \text{ 或 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 700\pi \text{ rad/s}$$

且振幅为 2V。因此,它是必须将  $2\sin 700\pi(t - 5 \times 10^{-3})$  当  $t < 5 \times 10^{-3}$  s 和  $t > 15 \times 10^{-3}$  s 期间切掉成零的这种函数。于是,

$$v(t) = [2\sin 700\pi(t - 5 \times 10^{-3})][u(t - 5 \times 10^{-3}) - u(t - 15 \times 10^{-3})](V)$$

5.2 串联 RL 电路经历了在区间  $t_0 < t < t_1$  中发生的电压 V 脉冲,试求电路电流  $i(t)$ 。

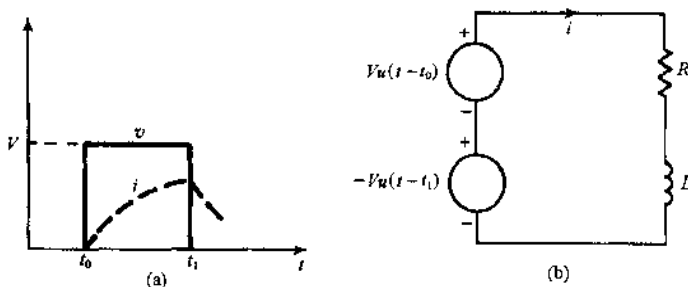


图 5-7

图 5-7(a)表示了这个脉冲,图 5-7(b)表示了用阶跃电压源模拟的这个电路。令  $i_0(t)$  和  $i_1(t)$  分别是归因于电源  $V_u(t - t_0)$  和  $-V_u(t - t_1)$  单独作用下的电流。于是由第 4 章(例 4.1)可以直接写出

$$i_0(t) = \frac{V}{R}[1 - e^{-R(t-t_0)/L}]u(t - t_0), \quad i_1(t) = -\frac{V}{R}[1 - e^{-R(t-t_1)/L}]u(t - t_1)$$

并且用叠加定理,  $i(t) = i_0(t) + i_1(t)$ 。在图 5-7(a)中画出了这个电流。

在这个情形中,分别加在两个电流上的初始条件  $i_0(t_0) = 0$  和  $i_1(t_1) = 0$ ,自动地确保  $i(t_0) = 0$  和在  $t = t_1$  时  $i(t)$  是连续的(电感中的电流不能跃变)。

- 5.3 在图 5-8(a)中表示了单个锯齿电压波形。试用阶跃函数和斜坡函数的叠加合成这个波形。

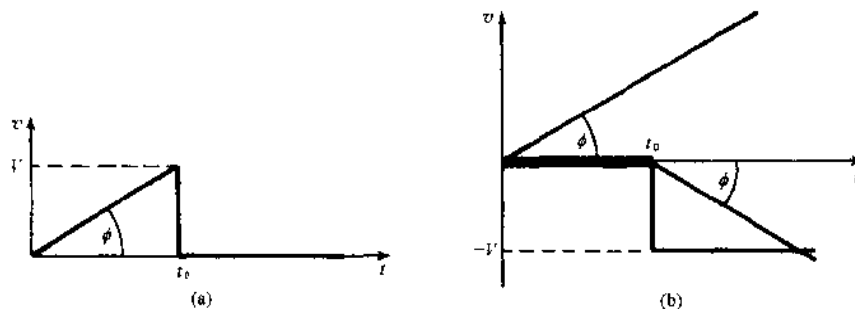


图 5-8

合成中所需的三个分量示于图 5-8(b), 解析地表示为

$$v(t) = \frac{V}{t_0} r(t) - V u(t - t_0) + \frac{V}{t_0} r(t - t_0)$$

- 5.4 如果串联 RC 电路中电容是初始未充电的, 施加电压的形式如图 5-8(a)中所示, 试求电路中的电流。

电流的微分方程①为

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv}{dt} = \frac{V}{t_0} u(t) - \frac{V}{t_0} u(t - t_0) \quad (1)$$

现在合成强制函数的两个阶跃分别产生具有稳态值  $CV/t_0$  和  $-CV/t_0$  的电流, 除此之外像例 5.2 一样进行求解。于是, 当  $t > 0$  时,

$$i(t) = \left[ A e^{-t/RC} + \frac{CV}{t_0} \right] + \left[ B e^{-(t-t_0)/RC} - \frac{CV}{t_0} \right] u(t - t_0) \quad (2)$$

初始条件  $i(0_+) = 0$  [因为  $v(0) = 0$ ] 确定了

$$A = -\frac{CV}{t_0}$$

在  $t = t_0$  时电容电压的连续性要求

$$\begin{aligned} \Delta v|_{t=t_0} &= R \Delta i|_{t=t_0} \\ -V &= R \left[ B - \frac{CV}{t_0} \right] \\ B &= \frac{CV}{t_0} - \frac{V}{R} \end{aligned}$$

常数有了这些值, (2) 就成为

$$i(t) = \frac{CV}{t_0} (1 - e^{-t/RC}) - \frac{CV}{t_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t_0}{RC} \right) e^{-(t-t_0)/RC} \right] u(t - t_0) \quad (3)$$

当然这个电流是纯瞬态的, 具有稳态值

$$\frac{CV}{t_0} - \frac{CV}{t_0} = 0$$

- 5.5 试证明下述拉普拉斯变换的平移性质: 如果  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , 则

$$e^{-as} F(s) = \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}$$

有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} &\equiv \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t-a)e^{-st} dt \end{aligned}$$

① 方程(1)右端缺负的冲激项。虽然求解过程中用了在  $t = t_0$  时电容的电压连续性条件, 使答案  $i(t)$  是正确的, 但在  $t = t_0$  时  $di/dt \rightarrow -\infty$  又与方程(1)矛盾。——译者注

$$\begin{aligned}
 &= e^{-as} \int_0^{\infty} f(t-a) e^{-s(t-a)} d(t-a) \\
 &\equiv e^{-as} F(s)
 \end{aligned}$$

### 5.6 用拉普拉斯变换法求解题 5.4。

只有当时间函数的全部条件是在  $t=0_+$  时加入, 拉普拉斯变换法才是有用的。所以, 首先研究题 5.4 电路中的电容电荷  $q(t)$ , 它遵从惟一条件  $q(0_+)=0$ 。电路方程为

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v = \begin{cases} Vt/t_0 & (0 < t < t_0) \\ 0 & (t > t_0) \end{cases} \quad (1)$$

进行(1)的拉普拉斯变换并应用初始条件, 有

$$\begin{aligned}
 R s Q(s) + \frac{1}{C} Q(s) &= \frac{V}{t_0} \int_0^{t_0} t e^{-st} dt \\
 &= \frac{V}{t_0} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-st_0} - \frac{t_0}{s} e^{-st_0} \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

因为  $i = dq/dt$  且  $q(0_+)=0$ , 现在  $I(s) = sQ(s)$ 。解(2), 用  $\alpha \equiv 1/(RC)$ , 于是给出

$$\begin{aligned}
 I(s) &= sQ(s) = \frac{V}{Rt_0} \frac{1}{s(s+\alpha)} - \frac{V}{Rt_0} \frac{e^{-st_0}}{s(s+\alpha)} - \frac{V}{R} \frac{e^{-st_0}}{s+\alpha} \\
 &\equiv I_1(s) + I_2(s) + I_3(s)
 \end{aligned} \quad (3)$$

逐项反变换(3), 像例 5.5 中那样, 有

$$i_1(t) = \frac{V}{Rt_0\alpha} (1 - e^{-at})$$

然后用平移定理(题 5.5), 有

$$i_2(t) = -\frac{V}{Rt_0\alpha} [1 - e^{-a(t-t_0)}] u(t-t_0)$$

最后, 用表 5-1 的第 4 行和平移定理, 有

$$i_3(t) = -\frac{V}{R} e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0)$$

读者可以证实刚求出的解答

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

与题 5.4 的(3)是吻合的。他还可以辨认出电流  $i_1, i_2, i_3$  正是图 5-8(b)中所示三个电压分量的分别响应。

### 5.7 串联 RLC 电路具有 $R=250\Omega$ , $L=10\text{mH}$ , $C=100\mu\text{F}$ 。假定为零初始条件, 试用拉普拉斯变换求出对于单位冲激电压输入的(固有)电流。

对于初始未充电的电容, 电路的电压方程为

$$\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri + L \frac{di}{dt} = v(t) \quad (1)$$

代入已知的数值, (1)成为

$$10^4 \int_0^t i(\tau) d\tau + 250i + 10^{-2} \frac{di}{dt} = \delta(t) \quad (2)$$

进行(2)的拉普拉斯变换得出

$$\frac{10^4}{s} I(s) + 250I(s) + 10^{-2} sI(s) = 1 \quad (3)$$

然后, 用部分分式,

$$I(s) = \frac{100s}{s^2 + 25000s + 10^6} = \frac{100s}{(s + 24960)(s + 40)} = \frac{100 \cdot 16}{s + 24960} - \frac{0.16}{s + 40}$$

反变换, 得  $i(t) = 100.16e^{-24960t} - 0.16e^{-40t} \text{ (A)}$  (4)

在上述的求解中, 对  $\delta$  函数的处理是与例 5.3 中完全不同的, 那里仅仅是导出初始条件  $i(0_+) = V \cdot 1/L$ , 加至齐次方程上。相反, 这里已将拉普拉斯变换反向延伸到  $t=0_-$ , 结果是(2)中的  $di/dt$  不在(3)中引起初值项。而正确的初始值置入解答(4)之中:

$$i(0_+) = 100.16 - 0.16 = 100 \text{ A} = \frac{1V \cdot s}{10\text{mH}}$$

### 5.8 $2\mu\text{F}$ 电容的变换域端电压已知为

$$V_C(s) = \frac{60s + (8 \times 10^4)}{s^2 + 10^6}$$

通过电容的电流为何?

由表 5-1 的第 16 行初值定理, 得

$$v_C(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV_C(s) = 60\text{V}$$

于是由  $i = C(dv_C/dt)$  得出

$$\begin{aligned} I(s) &= C[sV_C(s) - v_C(0_+)] = (2 \times 10^{-6}) \left[ \frac{60s^2 + (8 \times 10^4)s}{s^2 + 10^6} - 60 \right] \\ &= (0.16) \frac{s}{s^2 + 10^6} - (0.12) \frac{10^3}{s^2 + 10^6} \end{aligned}$$

由表 5-1 的第 7 行和第 6 行反变换, 得

$$i(t) = 0.16\cos 1000t - 0.12\sin 1000t = 0.20\sin(1000t + 127^\circ)(\text{A})$$

**5.9** 参看图 5-9。当开关在位置 1 时电路已处于稳态。在  $t=0$  时开关移至位置 2。求解当  $t>0$  时的电路电流。

当  $t>0$  时,

$$4 \frac{di}{dt} + 2i = 12$$

将其变换为

$$4sI(s) - 4i(0_+) + 2I(s) = \frac{12}{s} \quad (1)$$

$i(0_+) = i(0_-)$  是当开关在位置 1 时的稳态电流, 如

$$i(0_+) = \frac{6}{2} = 3\text{A} \quad (2)$$

由 (1) 和 (2),

$$I(s) = \frac{6(s+1)}{s(2s+1)} = 6 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{2s+1} \right) = 6 \left( \frac{1}{s} - \frac{0.5}{s+0.5} \right) \quad (3)$$

然后

$$i(t) = 6(1 - 0.5e^{-0.5t}) (\text{A})$$

**5.10** 如果尚未解出  $i(t)$ , 试求图 5-9 电路中的稳态电流。

将终值定理应用到题 5.9 的 (3), 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{6(s+1)}{s(2s+1)} \right] = 6\text{A}$$

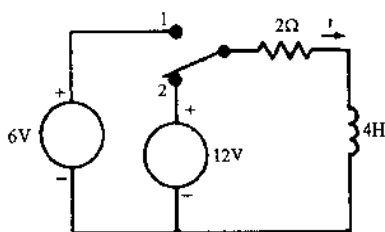


图 5-9

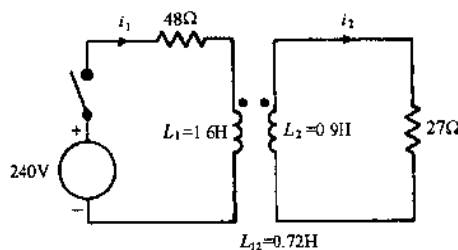


图 5-10

**5.11** 如果开关在  $t=0$  时接通, 求解图 5-10 中所示电路的  $i_1$  和  $i_2$ 。互感是附加极性的。

当  $t>0$ , 电路方程为

$$1.6 \frac{di_1}{dt} + 48i_1 - 0.72 \frac{di_2}{dt} = 240, \quad -0.72 \frac{di_1}{dt} + 0.9 \frac{di_2}{dt} + 27i_2 = 0$$

这些方程的变换域方程成为(零初始值)

$$\begin{aligned} (1.6s + 48)I_1(s) - 0.72sI_2(s) &= \frac{240}{s} \\ -0.72sI_1(s) + (0.9s + 27)I_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

解出  $I_1(s)$  和  $I_2(s)$  并进行它们的反变换,

$$i_1(t) = 5 - 2.5e^{-75t} - 2.5e^{-75t/4} \text{ (A)}, \quad i_2(t) = -3.33e^{-75t} + 3.33e^{-75t/4} \text{ (A)}$$

5.12 参看题4.11。当电路的参数使

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 \equiv R$$

时,满足初始条件(6)和(7)的(5)之解显然是  $v(t) = RI$ ;即这个电路成为纯电阻性的且不经瞬态过程。试用(1)、(2)、(3)的拉普拉斯变换解验证这个普遍谐振的现象(已经在题3.11中论述过)。

考虑到初始条件  $i_1(0_+) = 0$  和  $i_2(0_+) = I$ , 得到变换方程

$$\begin{aligned} I_1(s) &= I_2(s) = \frac{I}{s} \\ V(s) &= RI_1(s) + LsI_1(s) \\ V(s) &= RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs} \end{aligned}$$

分别解出第二方程的  $I_1(s)$  和第三方程的  $I_2(s)$ , 代入第一方程, 并用  $R^2 = L/C$  得到

$$V(s) = \frac{RI}{s} \quad \text{这里 } v(t) = RI \quad (t > 0)$$

5.13 电感耦合电路如图5-11中所示。在  $t = 0$  时开关闭合。假定为零初始条件, 试求出电流  $i_2(t)$ 。

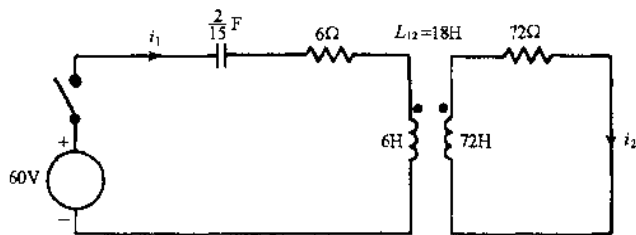


图 5-11

变换域的电路方程成为

$$\begin{aligned} \left(6s + 6 + \frac{15}{2s}\right)I_1(s) - 18sI_2(s) &= \frac{60}{s} \\ -18sI_1(s) + (72s + 72)I_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

解  $I_2(s)$ , 得

$$I_2(s) = \frac{10s}{s^3 + 8s^2 + 9s + 5} = \frac{10s}{(s + s_0)(s + s_1)(s + s_2)}$$

式中  $s_0 = 6.782$ ,  $s_1 = s_2^* = 0.609 + j0.607$ 。然后由部分分式方法给出

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \left[ \frac{-10s_0}{(s_1 - s_0)(s_2 - s_0)} \right] \frac{1}{s + s_0} + \left[ \frac{-10s_1}{(s_0 - s_1)(s_2 - s_1)} \right] \frac{1}{s + s_1} \\ &\quad + \left[ \frac{-10s_2}{(s_0 - s_2)(s_1 - s_2)} \right] \frac{1}{s + s_2} \\ &= -\frac{1.763}{s + 6.782} + \left\{ \frac{0.882 - j0.726}{s + s_1} + (\text{复共轭}) \right\} \end{aligned}$$

反变换

$$\begin{aligned} i_2(t) &= -1.763e^{-6.782t} + \{ (0.882 - j0.726)e^{-(0.609 + j0.607)t} + (\text{复共轭}) \} \\ &= -1.763e^{-6.782t} + \{ 1.142e^{-0.609t} e^{-j(0.607t + 39.5^\circ)} + (\text{复共轭}) \} \\ &= -1.763e^{-6.782t} + 2.284e^{-0.609t} \cos(0.607t + 39.5^\circ) \text{ (A)} \end{aligned}$$

## 补充习题

- 5.14 以图解方式表明:用(平移的)阶跃函数的叠加,可以随意精密地逼近任意的波形。

答 图 5-12 表示了用方脉冲对任意波形逼近到所需的精度。可以逐个将每个方脉冲用两个阶跃函数之差来表示(如图 5-4 中那样)。

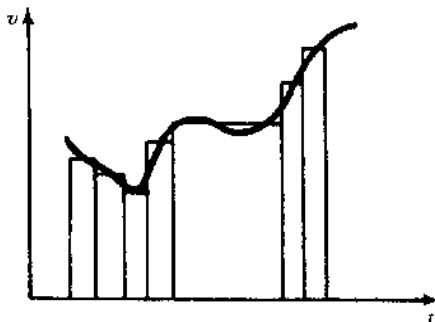


图 5-12

- 5.15  $20\mu\text{F}$  电容具有初始电压  $10\text{V}$ 。通过电容的电流在变换域以

$$I_C(s) = \frac{30}{s^2 + 3000s + (2 \times 10^6)}$$

表示。试求电容的端电压  $v_C(t)$ 。

答  $10.75 - 1.5e^{-1000t} + 0.75e^{-2000t} (\text{V})$

- 5.16 关于在图 4-10(第 4 章)中所示电路:  $I = 5\text{A}$ ,  $R_1 = R_2 = 1000\Omega$ ,  $C = 500\mu\text{F}$ ,  $L = 5\text{mH}$ 。开关在  $t = 0$  时断开。求电感支路中的变换电流。

答 
$$I_1(s) = \frac{10^6(s+2)}{s[s^2 + (4 \times 10^5)s + (4 \times 10^5)]}$$

- 5.17 已知图 4-11(第 4 章)电路中:  $I = 2\text{A}$ ,  $R_1 = R_2 = 10\Omega$ ,  $L = 0.5\text{mH}$ ,  $C = 10\mu\text{F}$ 。开关在  $t = 0$  时断开。试求 (a) 电路两端的变换电压, (b)  $v$  的稳态值。

答 (a)  $\frac{20[s^2 + (3 \times 10^4)s + (2 \times 10^8)]}{s[s^2 + (4 \times 10^4)s + (2 \times 10^5)]}$ ; (b)  $20\text{V}$

- 5.18 下面是图 4-11(第 4 章)电路的元件值:  $I = 1.0\text{A}$ ,  $L = 100\text{mH}$ ,  $C = (160/9)\mu\text{F}$ ,  $R_1 = 90\Omega$ ,  $R_2 = 0\Omega$ 。开关在  $t = 0$  时断开。试求 (a) 电感支路中的电流  $i_1(t)$ , (b) 电路的端电压  $v(t)$ 。

答 (a)  $i_1(t) = 1 + 1.25e^{-450t} \sin(600t - 126.9^\circ) (\text{A})$ ;

(b)  $v(t) = 90 + 93.75e^{-450t} \sin(600t - 73.8^\circ) (\text{V})$

- 5.19 当  $R_2 = 60\Omega$ , 其他值保持不变的情况下, 重新求解题 5.18。

答 (a)  $i_1(t) = 1 - (1 + 150t)e^{-750t} (\text{A})$ ;

(b)  $v(t) = 30[3 - (1 + 75t)e^{-750t}] (\text{V})$

- 5.20 参看图 3-21(第 3 章)中的桥式电路。臂 1 和臂 4 是纯电容  $C$ , 臂 2 和臂 3 是纯电感  $L$ 。整流器  $D$  是纯电阻  $R$ 。  $R, L, C$  的值是使  $R = \sqrt{L/C}$ 。用以代替图 3-21 中所示的交流电源, 让一个直流电压  $V$  突然加入。试求整流器的端电压。

答  $V(1 - 2e^{-Rt/L})$

- 5.21 试用拉普拉斯变换求解题 4.14, 4.18, 4.19, 4.20, 4.28。

## 6.1 引言

状态变量分析法的途径是试图以系统的方式处理元件互连的复杂电路的一项成果。电路以状态变量组成因变量时的描述方程正是适合于矩阵形式表示法。对于多变量多输入电路,状态变量法导致了普遍的而简明的求解概念;然而,在具有多于三个独立贮能元件(电感和电容)电路方程组的求解中,常有的繁重计算可能需要用数值计算法。

## 6.2 有关的矩阵理论

在介绍用状态变量法描述和分析电路的概念继续之前,适当的矩阵理论的复习是必要的。定义和符号用例题加以简要表示和直接阐明。

矩阵是元素(实数、复数、或函数)的矩形排列。 $n \times m$  ( $n$  行和  $m$  列)矩阵  $\mathbf{A}$  ( $n \times m$  阶的)的通式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (6.1)$$

如果  $m = n$ , 将矩阵  $\mathbf{A}$  称为方阵。将  $a_{ii} = 1$  且  $a_{ij} = 0 (i \neq j)$  的方阵称为单位矩阵 ( $\mathbf{I}$ )。说清楚些,三阶单位矩阵为

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  $\mathbf{A}$  的转置矩阵(用  $\mathbf{A}^t$  代表)是互换  $\mathbf{A}$  的行与列得到的。

**例 6.1** 作出如下矩阵  $\mathbf{C}$  的转置矩阵:

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

**解** 互换  $\mathbf{C}$  的行与列得

$$\mathbf{C}^t = [c_{ji}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

向量是只有一列的矩阵。只有一行的矩阵称为行向量。

**例 6.2** 将如下向量  $\mathbf{x}$  写为行向量  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**解** 作出  $\mathbf{x}$  的转置,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^t = [3 \quad 0 \quad 2]$$

两个矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  (必须是同阶的)的加法和减法定义为

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}] \quad (6.2)$$

例 6.3 对应地加和减如下矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ , 得出  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{G}$ 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

解 根据式(6.2),

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (1+1) & (7+4) & (3+3) \\ (2+2) & (5+5) & (6+2) \\ (9+3) & (4+6) & (8+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 4 & 10 & 8 \\ 12 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (1-1) & (7-4) & (3-3) \\ (2-2) & (5-5) & (6-2) \\ (9-3) & (4-6) & (8-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

当且仅当两个矩阵可乘( $\mathbf{A}$  的列数等于  $\mathbf{B}$  的行数)时定义它们的乘法( $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ )。特殊地

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \left[ \sum_k a_{ik} b_{kj} \right] \quad (6.3)$$

因此,  $\mathbf{C}$  具有同  $\mathbf{A}$  一样的行数和同  $\mathbf{B}$  一样的列数。通常  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ , 或乘法是不可换的。

例 6.4<sup>①</sup> 对于下列矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ , 作出乘积  $\mathbf{AB}$ 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

解 根据式(6.3),

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

例 6.5 对于下列矩阵  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$ , 作出两个乘积  $\mathbf{CD}$  和  $\mathbf{DC}$ , 以看出结果是不同的, 这就是矩阵乘法的不可换性质举例。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

解 根据式(6.3),

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 38 & 25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 27 & 40 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

例 6.6 利用例 6.5 的方阵  $\mathbf{C}$ , 作出  $\mathbf{C}^2 \equiv \mathbf{CC}$ 。

解 用式(6.3),

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

例 6.7 利用例 6.5 的方阵  $\mathbf{C}$ , 表明用单位矩阵左乘或右乘时都使这个矩阵不变。

解

$$\mathbf{IC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CI} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

数量  $c$  与矩阵的乘法是用这个数量乘矩阵的每个元素来完成的。特殊地,

$$c\mathbf{A} = \mathbf{Ac} = [ca_{ij}] \quad (6.4)$$

矩阵对于数性变量的求导或积分是以每个元素对这个指定的变量求导或积分来实现的。那就是,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}} = \left[ \frac{d}{dt}m_{ij} \right] \quad (6.5)$$

<sup>①</sup> 原著中提到因不可乘而不能定义  $\mathbf{BA}$ , 其实恰好是可乘的, 故删去这句话。——译者注



$$\int \mathbf{M} dt = \left[ \int m_j dt \right] \quad (6.6)$$

**例 6.8** 求如下矩阵  $\mathbf{A}$  对  $t$  的导数:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ e^{at} & \sin(t) \end{bmatrix}$$

**解** 根据式(6.5),

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ae^{at} & \cos(t) \end{bmatrix}$$

**例 6.9** 求例 6.8 的矩阵  $\mathbf{A}$  对  $t$  的积分。

**解** 用式(6.6),

$$\int \mathbf{A} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 + c_1 & t + c_2 \\ \frac{1}{a}e^{at} + c_3 & -\cos(t) + c_4 \end{bmatrix}$$

式中  $c_1 \sim c_4$  是来自不定积分的任意常数。

$n \times n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的行列式(用  $|\mathbf{A}|$  代表)是一个数量,由

$$|\mathbf{A}| = \sum_k (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (6.7)$$

求出,式中的求和遍及  $1, 2, \dots, n$  的全部  $n!$  个排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$ , 而  $k$  是排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数(由单调增加开始的变动)。

**例 6.10** 用式(6.7)作出矩阵  $\mathbf{B}$  的行列式,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

**解**

$$|\mathbf{B}| = (-1)^0 b_{11} b_{22} + (-1)^1 b_{12} b_{21} = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$$

方阵  $\mathbf{D}$  的子式  $D_{ij}$  是从  $\mathbf{D}$  中删去第  $i$  行和第  $j$  列后构成的行列式。代数余子式矩阵(用  $\text{cof} \mathbf{D}$  代表)是与  $\mathbf{D}$  同阶的矩阵,用  $\mathbf{D}$  的子式带上正负号依照

$$\text{cof} \mathbf{D} = \mathbf{C} = [(-1)^{i+j} D_{ij}] \quad (6.8)$$

来实现。方阵  $\mathbf{D}$  的逆矩阵(用  $\mathbf{D}^{-1}$  代表)定义为

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^t}{|\mathbf{D}|} = \frac{[(-1)^{i+j} D_{ij}]^t}{|\mathbf{D}|} \quad (6.9)$$

**例 6.11** 求矩阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**解** 根据例 6.10 的结果,

$$|\mathbf{A}| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

用式(6.8),

$$\text{cof} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(6.9)得逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$n \times n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征值是多项式  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$  的根。这个多项式有  $n$  个根;于是,存在

$n$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。我们的论述将局限于相导特征值的情形。

**例 6.12** 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

的特征值。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (\lambda + 1) & -1 \\ 0 & (\lambda + 2) \end{vmatrix} = 0 \\ 0 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

由此,  $\lambda_1 = -1$  和  $\lambda_2 = -2$ 。

与  $n \times n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的每一个独立特征值相对应, 存在一个独立特征向量 ( $\mathbf{p}_i$ )。每一个特征向量满足方程

$$[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.10)$$

式(6.10)的求解总是需要一个参数的引入, 因此仅限于求得特征向量的一个倍数关系。

**例 6.13** 求出对应于例 6.12 中特征值的一组特征向量。

**解** 由式(6.10)求对应于  $\lambda_1 = -1$  的特征向量如下,

$$\begin{aligned} [\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} &= \left[ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此  $p_2 = 0$ 。由于  $p_1$  是参数, 任意选定  $p_1 = 1$ , 于是

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{同样,} \quad [\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{p}_2 = \mathbf{0} &= \left[ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此  $p_2 = -p_1$ 。任意选定  $p_1 = 1$ 。然后, 有

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

矩阵计算  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$  称为矩阵  $\mathbf{A}$  的相似性变换。设矩阵  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶的且有相异特征值, 如果变换的矩阵  $\mathbf{T}$  以  $\mathbf{T} = \mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n]$  (叫做模态矩阵) 构成, 其中  $\mathbf{p}_i$  是对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量, 则矩阵  $\mathbf{B}$  将是一个对角矩阵 (当  $i \neq j$  时  $b_{ij} = 0$ ), 其中  $b_{ii} = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

**例 6.14** 利用例 6.13 的特征向量构成模态矩阵  $\mathbf{P}$ , 并表明例 6.12 矩阵  $\mathbf{A}$  的相似性变换确实产生一个对角矩阵, 其元素是  $\mathbf{A}$  的特征值。

**解** 利用例 6.13 的  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_2$  构成  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{P}^{-1}$ 。

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{P}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

应用式(6.9), 得

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

进行相似性变换,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

### 6.3 状态变量定义

一个电路的状态变量定义为一组最少的变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , 当 1) 知道了任何时刻  $t_0$  的全部状态变量, 2) 写出了以状态变量表示的描述方程, 3) 知道了以后的输入, 则使得这些变量足以求出全部  $t > t_0$  时电路的过程。在状态变量定义中的含义是, 列写描述方程需用的微分方程, 状态变量必须与电路元件的瞬时贮能联系起来。状态变量的特例是通过电感的电流、电感的磁链、电容的端电压、电容贮存的电荷。

电路的状态是在同一瞬间(即  $t = t_0$ )统计全部状态变量给出的一组数。

对于一组状态变量的系统性处理和求解的知识主体建立在电路所需的描述方程之上, 这个方程组排列成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (6.11)$$

式中  $u_i$  是第  $i$  个输入(电流源或电压源)。利用向量符号, 式(6.11)可以写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (6.12)$$

由式(6.11), 式中  $\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{u}$  的量纲是明显的。

如果式(6.11)的每个一阶微分方程是线性的, 则式(6.11)可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m \end{aligned} \quad (6.13)$$

式中  $a_{ij}$  和  $b_{jk}$  是常数。进一步, 式(6.12)的矩阵形式得出向量微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (6.15)$$

在这一章的内容中将仅研究线性的向量微分方程。

**例 6.15** 将下面的二阶线性微分方程排列成为式(6.15)的向量微分方程形式:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 10\sin(\omega t) \quad (1)$$

**解** 令  $y_1 = x$  和  $y_2 = \dot{x}$ , 于是可以将(1)写成两个一阶微分方程, 如

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -3y_1 - 2y_2 + 10\sin(\omega t) \end{aligned}$$

或以式(6.15)的形式,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{Ay} + \mathbf{Bu} \\ \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

如果解出(2)的  $\mathbf{y}$ , 则  $x = y_1$ 。

**例 6.16** 将下面的一对联立二阶微分方程变换成式(6.12)的向量微分方程形式。

$$\ddot{x}_1 - x_2 = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 - x_1 = t \quad (2)$$

**解** 令  $y_1 = x_1, y_2 = \dot{x}_1, y_3 = x_2, y_4 = \dot{x}_2$ , 则可将(1)和(2)写为

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = y_4, \quad \dot{y}_4 = y_1 + t$$

或以式(6.15)的形式,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}u \\ \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \end{aligned} \quad (3)$$

#### 6.4 向量微分方程解法

将表 5-1 的第 10 行推广到矩阵的情况,使式(6.15)的拉普拉斯变换可以写为

$$s\mathbf{X} - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (6.16)$$

式中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

将式(6.16)移项给出

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X} = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (6.17)$$

式(6.17)对  $\mathbf{X}$  求解得

$$\mathbf{X} = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (6.18)$$

**例 6.17** 定义矩阵指数为

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} \quad (1)$$

证明  $\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ 。

**解** 表 5-1 第 3 行的推广导出

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}} \quad (2)$$

利用(2)作出(1)的拉普拉斯变换给出

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{s^{n+1}} + \cdots \quad (3)$$

用  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$  自左乘(3)得

$$\begin{aligned} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} &= [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\left[\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots\right] \\ &= \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{s} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^2} + \cdots\right] - \left[\frac{\mathbf{A}}{s} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^3}{s^3}\right] = \mathbf{I} \end{aligned}$$

由此

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \quad (4)$$

例 6.16 的结果使式(6.18)可以写为

$$\mathbf{X} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (6.19)$$

且向量微分方程式(6.15)为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6.20)$$

### 6.5 一阶电路

具有单个独立(无电压约束的)电容或单个独立(无电流约束的)电感的电路可以用一阶微分方程进行描述(因此叫做一阶电路)。虽然电容电荷或电感磁链可以选为状态变量,但是这一章的内容将遵循更普遍的方法挑选电容电压或电感电流为状态变量。当为一阶电路的情况时,式(6.20)中的  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{A}$  都简化成为一个数量。

**例 6.18** 用状态变量法求解题 5.9。

**解** 令  $x(t) = i(t)$ 。由题 5.9 的(2),  $x(0) = 3\text{A}$ 。当开关处于位置 2 时, KVL 的应用给出这个一阶电路的向量微分方程(DEQ):

$$4 \frac{dx}{dt} + 2x = 12$$

或移项

$$\dot{x} = -0.5x + 3 = ax + u \quad (1)$$

由式(6.20)得到  $t \geq 0$  时, (1)的解答为

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} u d\tau = e^{-0.5t}(3) + \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}(3) d\tau \\ x(t) &= i(t) = 3e^{-0.5t} + \frac{3}{0.5}[e^{-0.5(t-\tau)}]_{\tau=0}^t = 6(1 - 0.5e^{-0.5t}) \end{aligned} \quad (2)$$

**例 6.19** 用状态变量方法求解例 4.2。

**解** 令  $x(t) = v_C(t)$ , 记下  $x(0) = v_C(0) = 0$ 。由式(1.6),

$$i(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C\dot{x} \quad (1)$$

将 KVL 应用到开关闭合时的图 4-3(a)中, 并用(1)得出

$$Ri + v_C = R(C\dot{x}) + x = V \quad (2)$$

(2)移项, 得

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{V}{RC} \quad (3)$$

利用式(6.20), 当  $t \geq 0$  时(3)的解答为

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} u d\tau = e^{-t/RC}(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} \left( \frac{V}{RC} \right) d\tau \\ x(t) &= v_C(t) = V[e^{-(t-\tau)/RC}]_{\tau=0}^t = V(1 - e^{-t/RC}) \end{aligned} \quad (4)$$

将(1)应用于(4), 求出电流  $i(t)$  为

$$i(t) = C \frac{d}{dt}[V(1 - e^{-t/RC})] = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$$

### 6.6 高阶电路

具有总数大于一的独立电感和独立电容的电路, 在描述方程方面的结果是一组联立的一阶微分方程。在这种情况下, 式(6.20)的矩阵  $\mathbf{A}$  不是一个数量; 因此, 解中包含由例 6.17<sup>①</sup>的(1)所给出  $e^{\mathbf{A}t}$  的幂级数, 它特别需要计算到很多项以得到精度可接受的答案。通过利用相似性变换能够避免这个困难。

**例 6.20** 证明例 6.14 的特殊相似性变换导致

$$\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

**解** 以  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{P}^{-1}$  分别左乘和右乘例 6.14 的(1), 得到

<sup>①</sup> 原著中为“例 6.16”。——译者注

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \quad (1)$$

用(1)构成  $\mathbf{A}^2$ , 得

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}$$

一般,

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} \quad (2)$$

将(2)代入例 6.17 的(1), 然后以  $\mathbf{P}^{-1}$  和  $\mathbf{P}$  分别左乘和右乘, 得出

$$\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{\Lambda}^n t^n}{n!} = e^{\mathbf{\Lambda}t} \quad (3)$$

然而, 注意到(3)右端的展开式是一个对角矩阵, 其中第  $i$  个对角元素是  $e^{\lambda_i t}$  的幂级数表达式。于是,

$$\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P} = e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

利用模态矩阵  $\mathbf{P}$  进行(6.15)的向量 DEQ 中变量的转换。令

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y} \quad (6.21)$$

于是,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} \quad (6.22)$$

然后, 式(6.15)可写为

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6.23)$$

以  $\mathbf{P}^{-1}$  左乘式(6.23)并用例 6.14 的(1)给出

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6.24)$$

观察到式(6.24)与式(6.15)之间的相似, 根据式(6.20)得式(6.24)的解为

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6.25)$$


以  $\mathbf{P}$  左乘式(6.25)并注意  $\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , 求出

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6.26)$$

此式可用于求解高阶电路的向量 DEQ, 而没有与  $e^{\mathbf{A}t}$  的幂级数有关的计算困难。

## 例题解答

6.1 假设题 5.9 的开关在位置 2 直至趋于稳态, 又当某时刻 ( $t=0$ ) 迅速移至位置 1, 再用状态变量法求解。

 令  $x(t) = i(t)$ 。求出当开关在位置 2 (直流稳态) 时的初始条件电流。

$$x(0) = i(0) = \frac{12}{2} = 6\text{A} \quad (1)$$

当开关在位置 1 ( $t \geq 0$ ) 时, 应用 KVL 得到向量 DEQ 为

$$4 \frac{di}{dt} + 2i = 6$$

由此

$$\dot{x} = -0.5x + 1.5 = ax + u \quad (2)$$

利用式(6.20)带以(1)的初始条件,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u d\tau = e^{-0.5t}(6) + \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}(1.5)d\tau \\ i(t) = x(t) &= 6e^{-0.5t} + \frac{1.5}{-0.5}[e^{-0.5(t-\tau)}]_{\tau=0}^t = 3(1 + e^{-0.5t}) \end{aligned}$$

## 6.2 用状态变量法求解题 4.13。

令  $x(t) = v_C(t)$ , 极性同于  $V_0$ 。基于题 4.13 的结果,  $v_C(0) = x(0) = V_0 = 80\text{V}$ 。当  $t \geq 0$  时环绕左网孔应用 KVL。

$$v_C = x = (100 \times 10^{-6}) \dot{x} (800 + 200)$$

或

$$\dot{x} = -10x = ax \quad (1)$$

根据式(6.20)且  $u=0$ , (1)的解是

$$v_C(t) = x(t) = e^{at} x(0) = 80e^{-10t} \quad (2)$$

$$\text{用电压分配, } v_R(t) = \frac{200}{800+200} v_C(t) = 16e^{-10t} \quad (3)$$

## 6.3 用状态变量的方法研究例 4.4。

令  $x(t) = v_C(t)$  并记下  $x(0) = v_C(0) = 0$ 。模仿例 6.19 的(2), 有

$$R\dot{x} + v_C = RC\dot{x} + x = v_S = V_m \cos \omega t \quad (1)$$

因此

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{V_m}{RC} \cos \omega t = ax + u \quad (2)$$

由式(6.20)并用零初始条件得(2)的解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} \frac{V_m}{RC} \cos \omega \tau d\tau \\ v_C(t) = x(t) &= \frac{V_m}{RC} \left[ \frac{e^{-t/RC} \left( \omega \sin \omega t + \frac{1}{RC} \cos \omega t \right)}{(1/RC)^2 + \omega^2} \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{V_m}{\omega CZ} [\sin(\omega t + \varphi) + e^{-t/RC} \sin \varphi] \end{aligned}$$

式中

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega RC} \right), \quad Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$$

6.4 对于图 6-1 的电路, 如果当  $t=0$  开关闭合时电容是初始未充电的, 求电源电流  $i$ 。

令  $x(t) = v_C(t)$ 。由题所述,  $v_C(0) = x(0) = 0$ 。用元件  $v-i$  关系,

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{2} \dot{x}, \quad i_R = \frac{v_C}{R} = \frac{x}{2}$$

当开关闭合( $t \geq 0$ ),

$$i = \frac{50 - v_C}{2} = \frac{50 - x}{2} = i_R + i_C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\dot{x} \quad (1)$$

或

$$\dot{x} = -2x + 50 = ax + u \quad (2)$$

根据式(6.20)并用零初始条件, (2)的解为

$$\begin{aligned} v_C(t) = x(t) &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} u d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (50) d\tau \\ v_C(t) &= \frac{50}{2} [e^{-2(t-\tau)}]_{\tau=0}^t = 25(1 - e^{-2t}) \quad (3) \end{aligned}$$

将(3)代入(1),

$$i(t) = \frac{50 - 25(1 - e^{-2t})}{2} = 12.5(1 + e^{-2t})$$

6.5 图 6-2 电路中的开关在  $t=0$  时接通。如果  $i_L(0) = 0$ , 用状态变量法求  $t \geq 0$  时  $i_L(t)$ 。

开关接通后, 中间网孔的两个并联连接电阻可以用一个阻值为  $R/2$  的等效电阻代替, 在其中流过量值为  $I - i_L$  方向朝下的电流。于是由 KVL

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = \frac{R}{2}(I - i_L) \quad (1)$$

在(1)中令  $x = i_L$ , 并移项求得

$$\dot{x} = -\frac{3R}{2L}x + \frac{R}{2L}I = ax + u \quad (2)$$

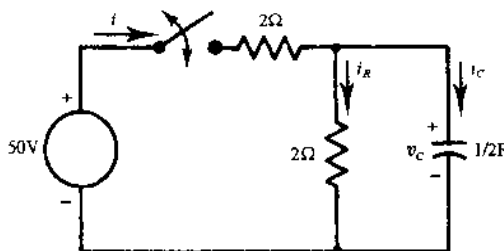


图 6-1

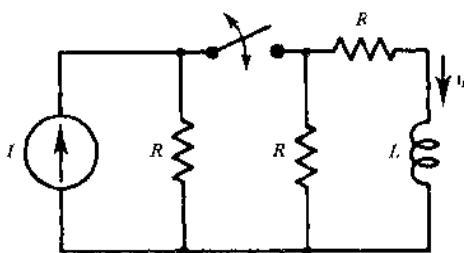


图 6-2

将式(6.20)应用于(2), 代入  $i_L(0) = x(0) = 0$  得

$$i_L(t) = x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} u d\tau = \int_0^t e^{-\frac{3}{2}(t-\tau)} \left( \frac{RI}{2L} \right) d\tau$$

$$i_L(t) = \frac{RI}{2L} \left[ e^{-\frac{3}{2}(t-\tau)} \right]_{\tau=0}^t = \frac{RI}{3L} (1 - e^{-\frac{3}{2}t})$$

6.6 关于图 6-1 的电路, 开关以 1s 的间隔周期地断开和接通(2s 的总周期)。试用状态变量法求出在这种循环转换开始的长时间之后(重复或循环稳态条件)的电容电压  $v_C(t)$ 。

令  $x(t) = v_C(t)$  并假定在任意选取的  $t=0$  时开关刚好接通。于是, 当  $0 \leq t \leq 1$ s 时向量 DEQ 与题 6.4 的(2)相同, 或

$$\dot{x} = -2x + 50 = ax + u \quad (1)$$

然而, 初始条件  $x(0)$  尚待确定。由式(6.20)得(1)的解, 并计算在  $t=1$ s 时

$$v_C(1) = x(1) = e^{ax(0)} = \int_0^1 e^{a(t-\tau)} u d\tau = e^{-2} x(0) + \int_0^1 e^{-2(t-\tau)} (50) d\tau$$

$$x(1) = e^{-2} x(0) + \frac{50}{2} [e^{-2(t-\tau)}]_{\tau=0}^1 = e^{-2} x(0) + 25(1 - e^{-2}) \quad (2)$$

在开关断开( $1 \leq t \leq 2$ )期间,

$$x(t) = v_C(t) = -i_C R = -\left(\frac{1}{2} \dot{x}\right) 2 = -\dot{x}$$

或

$$\dot{x} = -x = ax \quad (3)$$

初始时间取为  $t=t_0$  而不取  $t=0$ , 式(6.20)成为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (4)$$

认识到电路过程是循环的以致  $v_C(2) = v_C(0)$ ①, 对(3)应用(4), 且  $t_0=1$ s 和  $u=0$ , 并计算在  $t=2$ s 时的结果为

$$v_C(2) = v_C(0) = x(0) = e^{-(2-t_0)} x(t_0) = e^{-1} x(1) \quad (5)$$

对于  $x(0)$  和  $x(1)$ , (2)和(5)的联立解得出

$$x(1) = \frac{25(1 - e^{-2})}{1 - e^{-3}} \simeq 22.75V$$

$$x(0) = \frac{e^{-1}(25)(1 - e^{-2})}{1 - e^{-3}} \simeq 8.37V$$

当已知  $x(0)$  和  $x(1)$ , 由式(6.20)和(4)分别得到(1)和(3)的解。

当  $0 \leq t \leq 1$ s 时,

$$v_C(t) = e^{-2t}(8.37) + 25(1 - e^{-2t}) = 25 - 16.63e^{-2t}$$

当  $1 \leq t \leq 2$ s 时,

$$v_C(t) = e^{-(t-1)}(22.75) = 22.75e^{-(t-1)} \quad (6)$$

6.7 图 6-3 电路的电源  $v_S(t)$  是具有周期  $T$  的锯齿波形(见图 3-16), 当  $0 \leq t \leq T$  时以  $v_S(t) = V_m t/T$  描述。如果电路已经在重复稳态下工作了足够长的时间, 试求在电源的一个周期中的  $i_L(t)$ 。

① 原著中为  $v_C(1)$ ; ② 原著中为  $v_C(t) = e^{-(t-1)}(22.75) = 22.75e^{-(t-1)}$ 。——译者注



令  $x(t) = i_L(t)$ 。在节点  $a$  上应用 KCL 得

$$\frac{v_L - v_S}{2} + \frac{v_L}{2} + i_L = 0 \quad (1)$$

在(1)中用  $i_L = x$  和  $v_L = \dot{x}/2$  并移项得出

$$\dot{x} = -2x + v_S = ax + u \quad (2)$$

由于电感电流是具有  $T$  的周期性的, 知  $x(0) = x(T)$ 。然后对(2)应用式(6.20)并计算在  $t = T$  时的结果为

$$x(0) = x(T) = e^{-2T}x(0) + \int_0^T e^{-2(T-\tau)} \left( \frac{V_m}{T} \tau \right) d\tau$$

$$(1 - e^{-2T})x(0) = \frac{V_m}{T} \left[ \frac{e^{-(T-\tau)}}{4} (2\tau - 1) \right]_{\tau=0}^T$$

或

$$x(0) = \frac{V_m}{4T} \frac{1 + (2T - 1)e^{2T}}{e^{2T} - 1} \quad (3)$$

将(3)代入根据式(6.20)所得(2)的解中导出

$$i_L(t) = x(t) = e^{-2t}x(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \left( \frac{V_m}{T} \tau \right) d\tau$$

$$i_L(t) = e^{-2t} \left[ \frac{V_m}{4T} \frac{1 + (2T - 1)e^{2T}}{e^{2T} - 1} \right] + \frac{V_m}{4T} [e^{-2(t-\tau)} (2\tau - 1)]_{\tau=0}^t$$

$$i_L(t) = \frac{V_m}{4T} \left( \frac{2Te^{2T}}{e^{2T} - 1} e^{-2t} + 2t - 1 \right)$$

## 6.8 对于满的 $2 \times 2$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

假定  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (相异特征值), 求出特征值、模态矩阵  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{P}^{-1}$  的以矩阵元素  $a_{ij}$  表示出的表达式。

由例 6.12 的(1)求矩阵的特征值。

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

行列式计算的结果是  $\lambda$  的二次多项式

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (1)$$

对(1)应用二次方程式得出特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \left[ \left( \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \right]^{1/2} \quad (2)$$

用式(6.10)求对应于  $\lambda_1$  的特征向量,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

任意选定  $p_{11} = a_{12}$ , 于是由(3)的第一方程得到  $p_{12}^{\text{①}} = \lambda_1 - a_{11}$ 。以对称性理由, 得到  $p_{21}^{\text{②}} = a_{12}$  和  $p_{22} = \lambda_2 - a_{11}$ 。因此,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \quad (4)$$

用式(6.9)计算出  $\mathbf{P}$  的逆矩阵

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (\lambda_2 - a_{11}) & -a_{12} \\ -(\lambda_1 - a_{11}) & a_{12} \end{bmatrix}}{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (5)$$

## 6.9 用状态变量法求解例 4.3 的情况 1。令 $x_1 = v_C$ 和 $x_2 = i$ 。

① 原著中为  $p_{21}$ ; ② 原著中为  $p_{12}$ 。——译者注

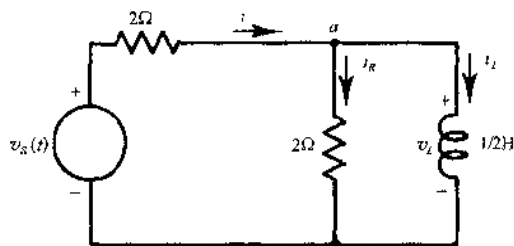


图 6-3

由例 4.3 的叙述,  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ 。根据式(6.1),

$$x_2 = C\dot{x}_1 \quad (1)$$

KVL 应用到  $t \geq 0$  的图 4.4(a) 得出

$$L\dot{x}_2 + Rx_2 + x_1 = V \quad (2)$$

分别对  $\dot{x}_1$  和  $\dot{x}_2$  解(1)和(2), 并按矩阵形式将结果排列得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} \quad (3)$$

(3) 中  $A$  的特征值由题 6.8 的(2)求出。

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \left[ \left( \frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right]^{1/2} = -\alpha \pm \beta \quad (4)$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  按例 4.3 中的情况 1 所定义的是两个正实数。用题 6.8 的(4)和(5)直接给出模态矩阵和它的逆矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 1/C & 1/C \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1/C \\ -\lambda_1 & 1/C \end{bmatrix}$$

根据式(6.20), 并用  $x(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P \int_0^t e^{A(t-\tau)} \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1/C \\ -\lambda_1 & 1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} d\tau \\ \mathbf{x}(t) &= \frac{V}{L(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} 1/C & 1/C \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} \\ e^{\lambda_2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\ \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i(t) \end{bmatrix} &= \frac{V}{LC(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ C(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

从(5)中分离第二个等式,

$$i(t) = \frac{V}{2\beta L} [e^{(-\alpha+\beta)t} - e^{(-\alpha-\beta)t}]$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  由(4)定义。

- 6.10 图 6-4 电路中的开关在  $t=0$  时接通。  $L_1$  和  $L_2$  两者都是初始不通电流的。令  $R_5 = R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 1\Omega$ ,  $L_1 = 1H$ ,  $L_2 = 2H$ 。应用状态变量的方法求出  $t \geq 0$  时的  $i_1(t)$  和  $i_2(t)$  ①。

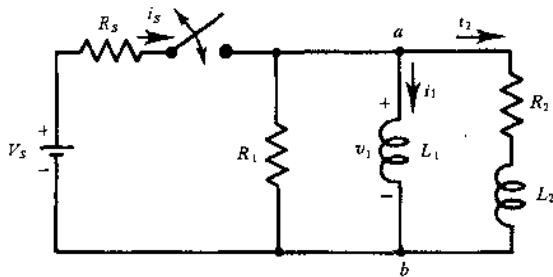


图 6-4

令  $x_1 = i_1$  和  $x_2 = i_2$ 。按题目的说明,  $\mathbf{x}(0) = 0$ 。由此电路, 明显地

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = \dot{x}_1 \quad (1)$$

又

$$i_s = \frac{V_s - v_1}{R_5} = \frac{V_s}{R_5} - \frac{L_1 \dot{x}_1}{R_5} = \frac{1}{2} V_s - \frac{1}{2} \dot{x}_1 \quad (2)$$

在节点  $a$  上应用 KCL,

$$i_s = \frac{v_1}{R_1} + i_1 + i_2 = \frac{1}{2} v_1 + x_1 + x_2 \quad (3)$$

将(1)和(2)代入(3)并移项求出

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + \frac{1}{2} V_s \quad (4)$$

① 原著中为  $i_2(t)$ 。——译者注

环绕右网孔用 KVL,

$$v = \dot{x}_1 = L_2 \frac{di_2}{dt} = R_2 i_2 = 2x_2 + x_2 \quad (5)$$

将(4)代入(5)并对  $t$  求解结果给出

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{4}V_s \quad (6)$$

将(4)和(6)排列成矩阵形式得到向量 DEQ, 即

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix} V_s \quad (7)$$

(7)中矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值按照题 6.8 的(2)求出为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1-1}{2}\right)^2 - (-1)(-1)} \\ &= (-1) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_1 &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.293, \quad \lambda_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1.707 \end{aligned}$$

对应的模态矩阵和它的逆矩阵由题 6.8 的(4)和(5)得出

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$


根据式(6.26)且  $x(0) = 0$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{(-0.293)\tau} & 0 \\ 0 & e^{(-1.707)\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix} V_s d\tau$$

进行所需的积分和矩阵乘法,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25e^{-0.293t} & 0.25e^{-1.707t} \\ -0.352e^{-0.293t} & -0.352e^{-1.707t} \end{bmatrix}$$

**6.11** 图 6-5 电路的开关在  $t=0$  时接通。写出为确定电容电压  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  所必须求解的向量 DEQ。

 在节点  $a$  应用 KCL, 并将结果移项。

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - V_B}{1} + (1)\dot{x}_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} &= 0 \\ \text{或} \quad \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + V_B \end{aligned} \quad (1)$$

在节点  $b$  用 KCL 得出

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{1} + (1)\dot{x}_2 + \frac{x_2 - x_3}{1} &= 0 \\ \text{因此,} \quad \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned} \quad (2)$$


环绕右网孔总计电压得出

$$\dot{x}_3 = x_2 - x_3 \quad (3)$$

将(1)~(3)排列为矩阵形式以产生所需的向量 DEQ。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_B \quad (4)$$

**6.12** 如果电容全是初始未充电的, 试求解题 6.11 的向量 DEQ 以得到图 6-5 电路的二个电容电压。

 由题目的说明,

$$\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

利用适当的计算机软件, 数值式地求得题 6.11 的(4)中  $\mathbf{A}$  的特征值、对应的模态矩阵和它的逆矩阵为

$$\lambda_1 = -1.5550, \quad \lambda_2 = -0.1981, \quad \lambda_3 = -3.2470$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4450 & -0.8019 \\ 0.4450 & 0.8019 & 1 \\ 0.8019 & 1 & 0.4450 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5432 & 0.2417 & -0.4356 \\ 0.2417 & 0.4536 & 0.5436 \\ -0.4356 & 0.5432 & -0.2417 \end{bmatrix}$$

根据式(6.26)且  $\mathbf{x}(0) = 0$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.4450 & -0.8019 \\ 0.4450 & 0.8019 & 1 \\ -0.8019 & 1 & -0.4450 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(\tau-t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(\tau-t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3(\tau-t)} \end{bmatrix} \cdot d\tau \begin{bmatrix} 0.5432 & 0.2417 & -0.4356 \\ 0.2417 & 0.4536 & 0.5436 \\ -0.4356 & 0.5432 & -0.2417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_B$$

在进行所需的积分和矩阵乘法之后,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = V_B \begin{bmatrix} 1 - 0.3493e^{-1.555t} - 0.5429e^{-0.1981t} - 0.1076e^{-1.247t} \\ 1 - 0.1554e^{-1.555t} - 0.9784e^{-0.1981t} + 0.1342e^{-1.247t} \\ 1 + 0.2801e^{-1.555t} - 1.2201e^{-0.1981t} - 0.0597e^{-1.247t} \end{bmatrix}$$

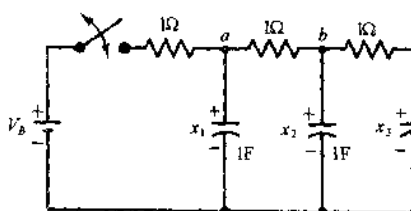


图 6-5

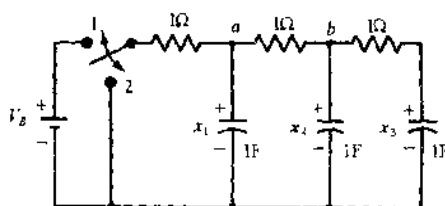


图 6-6

- 6.13 图 6-6 电路中的开关在  $t=0$  时突然从位置 1 移到位置 2。作出在确定所需的电容电压  $x_1, x_2, x_3$  中必须求解的向量 DEQ。

在节点  $a$  应用 KCL,

$$\frac{x_1}{1} + (1)\dot{x}_1 + \frac{x_1 - x_2}{1} = 0$$

或

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \quad (1)$$

在节点  $b$  应用 KCL,

$$\frac{x_2 - x_1}{1} + (1)\dot{x}_2 + \frac{x_2 - x_3}{1} = 0$$

或

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad (2)$$

环绕右网孔用 KVL:

$$\dot{x}_3 = x_2 - x_3 \quad (3)$$

将(1)~(3)排列为矩阵形式以得到所需的向量 DEQ:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- 6.14 如果题 6.13 中的开关先前已长时间处于位置 1, 在  $t=0$  时突然移动到位置 2, 试求解题 6.13 的向量 DEQ。

当开关在位置 1 时, 电路已达直流稳态, 电容必定不通电流(实际像开路)。因此, 通过全部电阻的电流都必定是零。必然要断定全部电容都已充电至电压  $V_B$ , 或

$$\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = [V_B \ V_B \ V_B]^T$$

由于题 6.13 中(4)的矩阵  $\mathbf{A}$  与题 6.11 的矩阵  $\mathbf{A}$  是相同的, 因而题 6.12 的特征值  $\mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1}$  都是可应用的。根据式(6.26)且  $\mathbf{u}=0$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.4450 & -0.8019 \\ 0.4450 & 0.8019 & 1 \\ -0.8019 & 1 & -0.4450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5432 & 0.2417 & -0.4356 \\ 0.2417 & 0.4536 & 0.5436 \\ -0.4356 & 0.5432 & -0.2417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_B \\ V_B \\ V_B \end{bmatrix}$$

在所需的矩阵乘法之后,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = V_B \begin{bmatrix} 0.3493e^{-1.555t} + 0.5433e^{-0.1981t} + 0.1075e^{-3.247t} \\ 0.1554e^{-1.555t} + 0.9790e^{-0.1981t} + 0.1341e^{-3.247t} \\ -0.2801e^{-1.555t} + 1.2209e^{-0.1981t} + 0.0597e^{-3.247t} \end{bmatrix}$$

## 补充习题

6.15 试用状态变量法求解例 4.1。令  $x(t) = i(t)$ 。

答  $i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

6.16 试用状态变量的方法研究题 4.2。令  $x(t) = i(t)$ 。

答  $i(t) = 20 - 16e^{-4t}$

6.17 假定图 6-1 电路的开关已经是长时直接通,然后在  $t=0$  时突然断开。试用状态变量的方法求出当  $t \geq 0$  时的  $i_R(t)$ 。令  $x(t) = v_C(t)$ 。

答  $i_R(t) = 12.5e^{-t}$

6.18 当开关于  $t=0$  闭合时,图 6-7 电路中的电感电流是初始零的。试用状态变量法求出当  $t \geq 0$  时的电源电流  $i(t)$ ,令其中  $x(t) = i_L(t)$ 。

答  $i(t) = 25 - 12.5e^{-2t}$

6.19 假定图 6-7 电路的开关已经是长时直接通,在  $t=0$  时突然断开。试用状态变量法求出当  $t \geq 0$  时的电流  $i_R(t)$ ,取  $x(t) = i_L(t)$ 。

答  $i_R(t) = -25e^{-4t}$

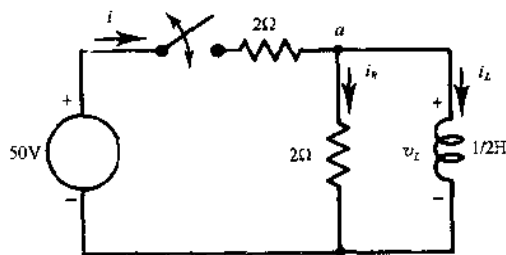


图 6-7

6.20 图 6-2 中的开关已经是长时直接通并在  $t=0$  时断开。令  $x(t) = i_L(t)$  并应用状态变量法求出当  $t \geq 0$  时的  $i_L(t)$ 。提示:  $x(0) = I/3$ 。

答  $i_L(t) = \frac{I}{3}e^{-\frac{2R}{L}t}$

6.21 图 6-2 电路的开关是以  $T$  秒间隔周期性地断开和接通,电路已经呈周期为  $2T$  的重复稳态。令  $R = 1\Omega$  和  $L = 1H$ 。假定  $x(t) = i_L(t)$ ,试用状态变量法求出当开关转换瞬间的电感电流值。

答  $x(0) = x(2T) = \frac{I}{3}(e^{\frac{3}{2}T} - 1)/(e^{\frac{1}{2}T} - 1); x(T) = \frac{I}{3}(e^{\frac{1}{2}T} - e^{2T})/(e^{\frac{1}{2}T} - 1)$

6.22 按题 6.21 描述的条件,求出处于重复稳态下电流  $i_L(t)$  的正确表达式。

答  $i_L(t) = \frac{\frac{I}{3}(e^{\frac{3}{2}T} - 1)}{e^{\frac{1}{2}T} - 1}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{I}{3}(1 - e^{-\frac{1}{2}t}), 0 \leq t \leq T$

$i_L(t) = \frac{\frac{I}{3}(e^{\frac{1}{2}T} - e^{2T})}{e^{\frac{1}{2}T} - 1}e^{-\frac{1}{2}(t-T)}, T \leq t \leq 2T$

6.23 图 6-3 的电路是处于重复稳态下。激励电路的方波电压源以

$$v_S(t) = \begin{cases} V_m, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -V_m, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

描述。试用状态变量的方法求出在电源的一个周期  $T$  中的  $i_L(t)$ 。

答  $i_L(t) = \begin{cases} \frac{V_m}{2} [e^{2t} - 1 - 2(e^{2T} - e^T)e^{-2t}] / (e^{2T} - 1), & 0 \leq t \leq T/2 \\ -\frac{V_m}{2} [e^{2T} - 1 - 2(e^{2T} - e^T)e^{-2(t-T/2)}] / (e^{2T} - 1), & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$

6.24 设  $x_1 = v_C$  和  $x_2 = i$ , 列出对于求解图 4-8 电路中电感电流和电容电压所需的向量 DEQ。

$$\text{答 } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ -V \end{bmatrix}$$

- 6.25 图 6-4 的电路具有题 6.10 中已给出的元件值。令  $x_1 = i_1$  和  $x_2 = i_2$ 。假定开关已是长时间接通并在  $t = 0$  时突然断开。试用状态变量分析求出当  $t \geq 0$  时  $i_1(t)$  和  $i_2(t)$  的表达式。提示:  $\mathbf{x}(0) = [V_s/2 \ 0]^T$

$$\text{答 } \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = V_s \begin{bmatrix} 0.207e^{-0.314t} + 0.294e^{-3.186t} \\ -0.174e^{-0.314t} + 0.174e^{-3.186t} \end{bmatrix}$$

- 6.26 图 6-5 电路中的开关已是长时间接通。在  $t = 0$  时它突然断开。写出在确定所需的  $t \geq 0$  时电压  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  中必须求解的向量 DEQ。

$$\text{答 } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 6.27 解出题 6.26 的向量 DEQ。提示:  $\mathbf{x}(0) = [V_B \ V_B \ V_B]^T$

$$\text{答 } \mathbf{x}(t) = [V_B \ V_B \ V_B]^T$$

- 6.28 图 6-8 电路的两个开关在  $t = 0$  时同步接通。试求出在确定所需的电容电压  $x_1, x_2, x_3$  中必须求解的向量 DEQ。

$$\text{答 } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ -V_B \end{bmatrix}$$

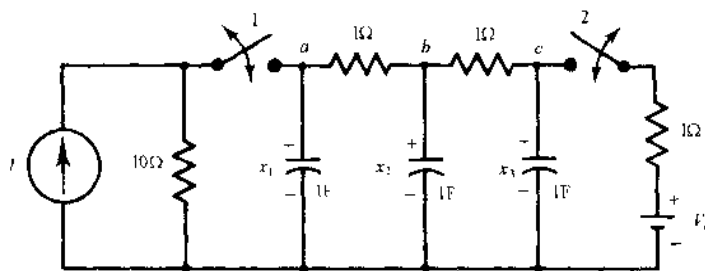


图 6-8

- 6.29 如果全部电容都是初始未充电的以致于  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ , 试求解题 6.28 的向量 DEQ。令  $I = 1\text{A}$  和  $V_B = 10\text{V}$ 。

$$\text{答 } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 11.9298e^{-0.598t} + 2.5783e^{-1.591t} - 0.648e^{-3.2582t} \\ 10 - 10.1308e^{-0.598t} - 1.2659e^{-1.591t} + 1.3983e^{-3.2582t} \\ 10 - 5.7919e^{-0.598t} - 3.0960e^{-1.591t} - 1.1114e^{-3.2582t} \end{bmatrix}$$

- 6.30 图 6-9 电路的开关在  $t = 0$  时突然接通。试确定为了获得电容电压  $x_1, x_2$  和电感电流  $x_3$  所必须求解的向量 DEQ。

$$\text{答 } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_B$$

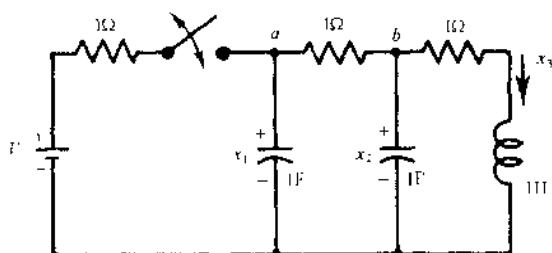


图 6-9

- 6.31 试求出图 6-9 电路的特征值, 并推测每个状态变量预期响应的性质。A 矩阵已经在题 6.30 中求得。

答  $\lambda_1 = -2.4656$ ;  $\lambda_{2,3} = 0.7672 \pm j0.7926$ 。预计了每个变量的一个直流稳态项(直流电源)。瞬态响应将包括一个归因于  $\lambda_1$  的衰减指数项和一个由  $\lambda_{2,3}$  引起的阻尼正弦项。典型地,

$$x_i(t) = a_i + b_i e^{-2.4656t} + c_i e^{0.7672t} \sin(0.7926t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, 3$$

式中  $a_i, b_i, c_i, \varphi_i$  都是常数。

## 第7章 二极管

### 7.1 引言

二极管是最久远并且用途最广泛的电子器件之一。可以将它定义为近单向的导体,这种导电性的状态取决于其端电压的极性。本章将主要讲述半导体二极管,这是用一个 p 型半导体材料与一个 n 型半导体材料的冶金结合而构成的。

### 7.2 半导体二极管的端极特性

图 7-1 中表示了普通二极管或整流二极管的图示符号。两端已标注了正极(p 型)和负极(n 型),由此这个器件选择了二极管的名称是可以理解的。当端电压为正( $v_D \geq 0$ )时,称做二极管是正向偏置的或“通”;正电流的流量( $i_D \geq 0$ )称为正向电流。当  $v_D$  值为负时,二极管是反向偏置的或“断”;所对应小的负电流称为反向电流。

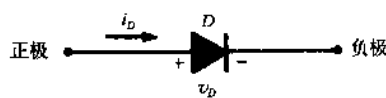


图 7-1

应用费米-狄拉克概率函数推算电荷的中和,得出如下的二极管电流公式:

$$i_D = I_0 (e^{v_D/V_T} - 1) \quad (\text{A}) \quad (7.1)$$

式中  $V_T \equiv kT/q$  (V)

$v_D \equiv$  二极管端电压, V

$I_0 \equiv$  饱和电流, A

$T \equiv$  绝对温度, K

$k \equiv$  玻耳兹曼常量 ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K)

$q \equiv$  电子电荷 ( $1.6 \times 10^{-19}$  C)

就温度的作用和动态电阻而言,式(7.1)用作了结型二极管的有效模型,然而由图 7-2 看到它有不准确之处:

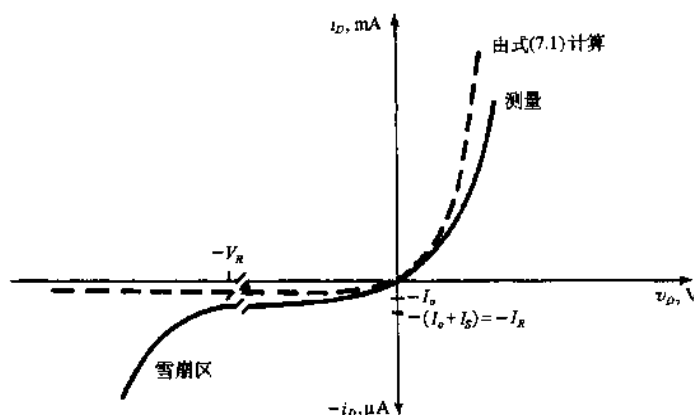


图 7-2

1. 实际的正向电压降是大于预计的(起因于金属接触的和半导体材料的欧姆性电阻)。
2. 在小的负  $v_D$  值时,实际的反向电流是大于预计的[起因于沿半导体表面的漏电流 ( $I_s$ )]。
3. 在大的负  $v_D$  值时,实际的反向电流增到远大于预计的值(起因于称做雪崩击穿的复杂

现象)。

本书中所研究的全部电路都假定是工作在反向击穿电压以上,即在  $v_D > -V_R$  范围内。

工业用的二极管用本征硅或本征锗的 p 掺杂和 n 掺杂(加入杂质)制成。用硅基材料生产的半导体二极管与用锗生产的器件具有不同的端极特性;在图 7-3 中做了一个比较。对于反向偏置( $-V_R < v_D < 0.1\text{V}$ ),两种二极管都呈现近于常数的反向电流  $I_R$ 。典型地,锗二极管是  $1 < I_R < 500\mu\text{A}$ ,而硅二极管是  $10^{-3} < I_R < 1\mu\text{A}$ 。对于正向偏置,锗二极管的低阻导通起始于  $0.2\text{V}$  与  $0.3\text{V}$  之间,而硅二极管需要  $0.6\text{V}$  至  $0.7\text{V}$ 。

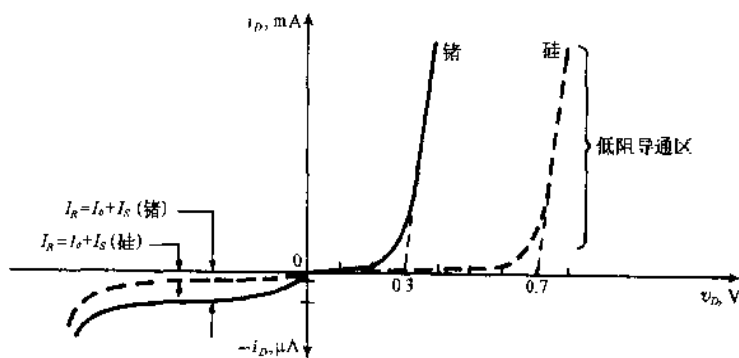


图 7-3

### 7.3 对一个理想二极管的电路分析

完美二极管或理想二极管将是一种两状态器件,当为正向偏置时呈现零阻抗,当为反向偏置时呈现无限大阻抗(图 7-4)。注意由于在任何瞬间电流或电压之一为零,理想二极管不消耗功率。

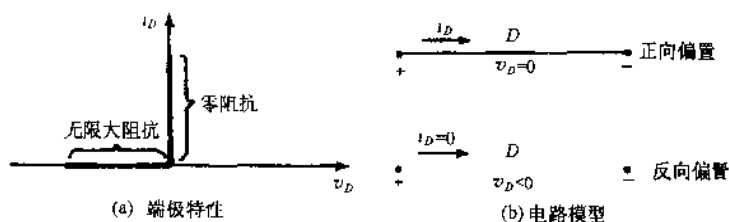


图 7-4 理想二极管

在正向电压降和反向电流都是很小的许多电路应用中,当以理想二极管模拟实际二极管时,有足够准确的解答结果。

理想二极管分析步骤:

第一步,假定为正向偏置,并用短路置换理想二极管。

第二步,用任何的线性电路分析技术计算二极管电流  $i_D$ 。

第三步,如  $i_D \geq 0$ ,分析是有效的,二极管实际为正向偏置,省去第四步。

第四步,如  $i_D \leq 0$ ,分析是无效的。用开路置换二极管强迫  $i_D = 0$ ,用任何的线性电路分析方法求解所需的电路量。求出的电压  $v_D$  将有一个负值。

例 7.1 求出图 7-5(a)电路中的电压  $v_L$ 。

解 第一步,假定为正向偏置,并用短路置换二极管,如图 7-5(b)。

第二步,用欧姆定律,

$$i_D = \frac{v_S}{R_S + R_L}$$

第三步,如  $v_S \geq 0$ ,则  $i_D \geq 0$ ,且



$$v_L = i_D R_L = \frac{R_L}{R_S + R_L} u_S$$

第四步, 如  $v_S < 0$ , 则  $i_D < 0$ , 第三步的结果是无效的。必须用开路置换二极管, 如图 7-5 (c) 中所示, 再进行全部分析。结果为  $v_L = i_D R_L = 0$ 。

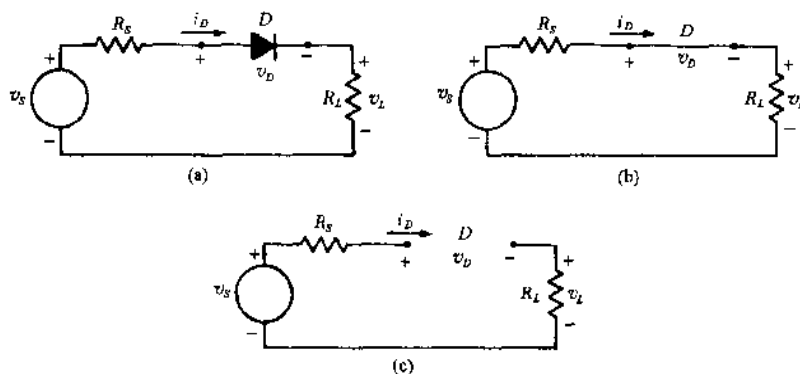


图 7-5

#### 7.4 图解电路分析

图解解法必然假定二极管是电阻性的, 因此用它的  $i_D-v_D$  关系曲线加以瞬时地表征。研究中网络的平衡应该是线性的, 使得从图 7-6 中二极管两端朝向网络看起来得到一个戴维南等效电路。用图解法求解  $i_D$  和  $v_D$  的两个联立方程就是二极管特性

$$i_D = f_1(v_D) \quad (7.2)$$

和负载线

$$i_D = f_2(v_D) \equiv -\frac{1}{R_{Th}} v_D + \frac{v_{Th}}{R_{Th}} \quad (7.3)$$

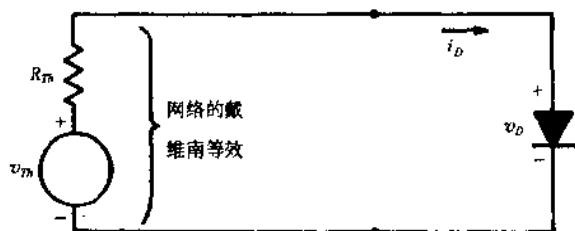


图 7-6

**例 7.2** 如果在网络原有的线性部分中全部电源都是直流的,  $v_{Th}$  也就是直流电源。图 7-7 (a) 表示了这样一个网络的化简网络, 试求  $i_D$  和  $v_D$ 。

**解** 将戴维南等效网络的方程 (7.3) 重叠画在图 7-7 (b) 中的二极管特性曲线上。这两条曲线的相交点给出了所需的解答,  $i_D = 2.93\text{mA}$  和  $v_D = 0.8\text{V}$ 。

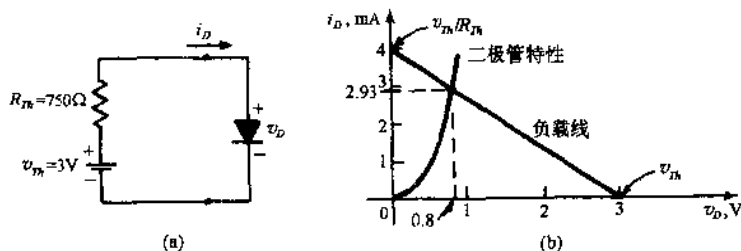


图 7-7

**例 7.3** 如果在网络原有的线性部分中全部电源都是时变的, 于是  $v_{Th}$  也是时变电源。这样一个网络的化简网络, 图 7-8(a) 具有 2V 峰值三角波的戴维南电源。试求这个网络的  $i_D$  和  $v_D$ 。

**解** 满足联立方程的  $i_D$  值不再是惟一的; 对应于呈现在时间进程中的每个  $v_{Th}$  值, 都存在一个  $i_D$  值。可以设想用某个周期中的有限个  $v_{Th}$  值来求出可接受的  $i_D$  解答。由于  $v_{Th}$  是重复性的,  $i_D$  也将是重复性的(具有相同的周期), 仅需考虑一个循环。

在图 7-8(b) 中, 将按比例放的  $v_{Th}$  曲线安放得使  $v_{Th}$  轴平行于二极管特性曲线的  $v_D$  轴。在  $v_{Th}$  曲线上选一个点如在  $t = t_1$  时  $v_{Th} = 0.5V$ 。设想时间在  $t = t_1$  停下来, 在二极管特性上绘制一条负载线, 与  $v_D$  轴在  $v_{Th} = 0.5V$  相截, 与  $i_D$  轴在  $v_{Th}/R_{Th} = 0.5/50 = 10mA$  处相截。求出对应于  $t = t_1$  时的  $i_D$  值, 并且在二极管特性曲线左边绘制的坐标系中画出这个点( $t_1, i_D$ )。令时间进行到某个新值  $t = t_2$ , 重复整个过程。继续到完成  $v_{Th}$  的一个循环为止。由于负载线是连续变动的, 故称做动态负载线。因为二极管的非线性,  $i_D$  解答与  $v_{Th}$  在形式上相差悬殊。

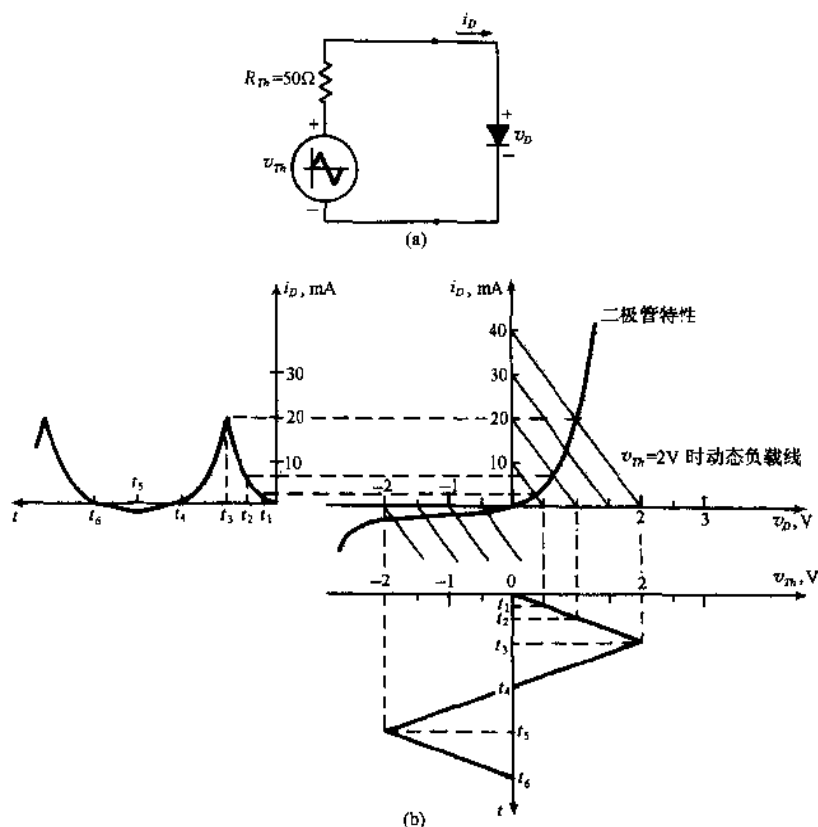


图 7-8

**例 7.4** 如果网络原有的线性部分中存在有直流电源和时变电源两种, 于是  $v_{Th}$  就是直流电源与时变电源的串联组合。假定戴维南电源可以用一个 0.7V 电池和一个 0.1V 峰值的正弦电源模拟出来, 如图 7-9(a) 所示。试求这个网络的  $i_D$  和  $v_D$ 。

**解** 将按比例放的  $v_{Th}$  曲线摆放得使  $v_{Th}$  轴平行于二极管特性曲线的  $v_D$  轴。设想  $v_{Th}$  的交流分量  $v_a$  (当  $t = 0$  时) 正是瞬间为零, 并在二极管特性上画出这一瞬间的负载线。将这条特殊的负载线称为直流负载线, 并将直流负载线与二极管特性曲线的交点称为静态点或 Q 点。在图 7-9(b) 中,  $i_D$  和  $v_D$  的解答分别标注为  $I_{DQ}$  和  $V_{DQ}$ 。

一般, 为了完成对  $i_D$  在  $v_{Th}$  的一个循环中的分析, 多条动态负载线是必要的。然而对于研

究中的网络, 仅仅当为  $v_{th}$  的最大值和  $v_{th}$  的最小值这两条动态负载线才是必需的。其理由是在图 7-9(b) 中二极管的特性曲线由  $a$  经  $Q$  至  $b$  之间几乎是一段直线, 以致于  $i_D$  的交流分量  $i_d$  将要发生的失真可以忽略。如果没有失真,  $i_d$  将是与  $v_{th}$  同形式的即正弦的, 只要确定了变量的两个极值, 便可以很容易地画出略图, 于是  $i_D$  的图解解答为

$$i_D = I_{DQ} + i_d = I_{DQ} + I_{dm} \sin \omega t = 36 + 8 \sin \omega t \quad (\text{mA})$$

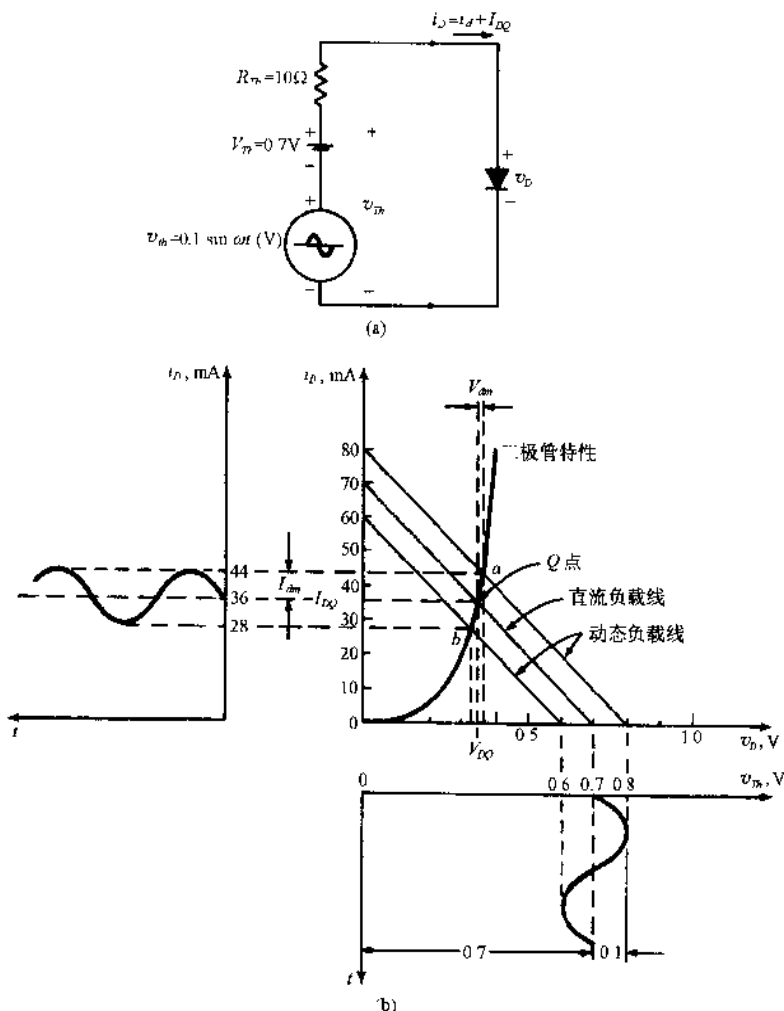


图 7 9

## 7.5 非理想二极管的等效电路

### 分段线性技术

分段线性方法是基于用直线线段对二极管特性曲线的逼近。这里的研究将局限于图 7-10 中所示的三种逼近。分段线性模型由用以替换实际二极管的理想二极管、电阻、电池的组来构成。由图 7-10(a) 给出的最简单模型, 当  $v_D < V_F$  时将实际二极管作为一个无限大电阻处理, 如  $v_D$  趋向成为大于  $V_F$  时将实际二极管作为一个理想电池处理。对于硅二极管, 通常将  $V_F$  选为 0.6~0.7V; 对于锗二极管, 通常将  $V_F$  选为 0.2~0.3V。

如果在应用时要求正向导通区中的准确度较高, 就引入一个电阻  $R_F$ , 如图 7-10(b) 中所示。如果不能忽略二极管反向电流 ( $i_D < 0$ ), 就引入图 7-10(c) 的附加电阻  $R_R$ 。

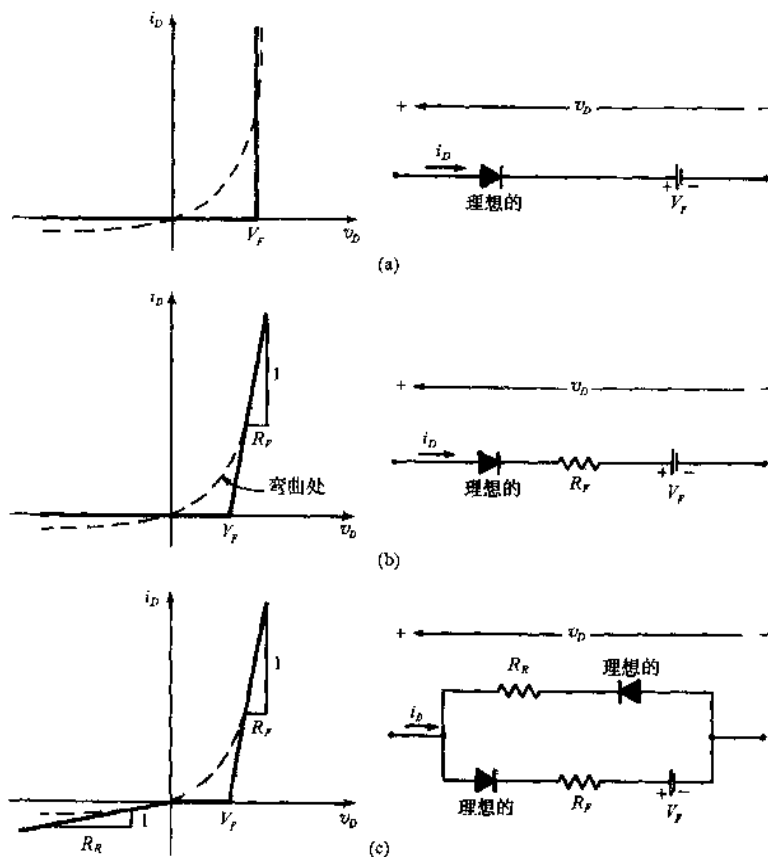


图 7-10

## 小信号技术

图 7-9 所示的二极管电路举例可作为小信号分析的成功应用。那里交流信号  $v_h$  的振幅是如此地小, 以致于在从  $b$  至  $a$  的整个工作范围内可以忽略二极管特性的曲率。于是, 二极管电压和二极管电流可以各自写为一个直流信号与一个无失真的交流信号之和。更进一步, 二极管交流电压  $v_d$  与二极管交流电流  $i_d$  之比将是一个常数:

$$\frac{v_d}{i_d} = \frac{2V_{dm}}{2I_{dm}} = \frac{v_D|_a - v_D|_b}{i_D|_a - i_D|_b} = \frac{\Delta v_D}{\Delta i_D} \bigg|_Q = \frac{dv_D}{di_D} \bigg|_Q \equiv r_d \quad (7.4)$$

式中  $r_d$  称为二极管的动态电阻。随之, 交流分量可以用图 7-11 等效电阻电路的分析来求得。由于二极管特性总是非线性的, 直流或静态分量一般必须用图解法求得。

**例 7.5** 求出图 7-9 电路的  $i_D$ 。

**解** 已经求得 Q 点电流  $I_{DQ}$  为 36mA (例 7.4)。二极管在 Q 点的动态电阻用图解法算出。

$$r_d = \frac{\Delta v_D}{\Delta i_D} = \frac{0.37 - 0.33}{0.044 - 0.028} = 2.5\Omega$$

分析图 7-11 的小信号电路求出  $i_d$ :

$$i_d = \frac{v_h}{R_{Th} + r_d} = \frac{0.1 \sin \omega t}{10 + 2.5} = 0.008 \sin \omega t \quad (\text{A})$$

用叠加法获得二极管总电流并且它同例 7.4 吻合得很好。

$$i_D = I_{DQ} + i_d = 36 + 8 \sin \omega t \quad (\text{mA})$$

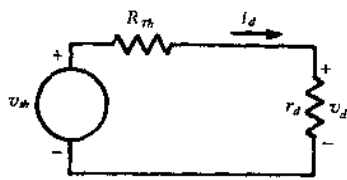


图 7-11

## 7.6 整流器应用

整流器电路利用二极管的近单向导电构成一个双口网络,交流电压施加于它的输入端,在输出端得到直流电压。

最简单的整流器电路只用一个二极管,如图 7-12 中的举例。因为二极管只传导输入电压波形中的正半波或负半波,所以通常将它称为半波整流器。

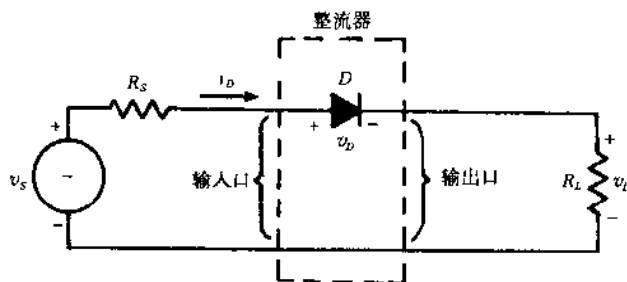


图 7-12

**例 7.6** 在图 7-12 中,  $v_s = V_m \sin \omega t$ , 且二极管是理想的, 试求  $v_L$  的平均值。

**解** 仅需考虑  $v_s$  的一周。正半周的  $i_D > 0$ , 而

$$v_L = \frac{R_L}{R_L + R_s} (V_m \sin \omega t) \equiv V_{Lm} \sin \omega t$$

当负半周时, 二极管为反向偏置,  $i_D = 0$ , 且  $v_L = 0$ , 从而

$$V_{Lavg} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_L(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V_{Lm} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V_{Lm}}{\pi}$$

虽然半波整流器给出了直流输出, 但电流流过  $R_L$  只占一半时间。进而,  $v_L$  的平均值只有  $1/\pi (=0.318) \times$  峰值。若需要时, 全波整流器能够提供改进, 仅用两个二极管和一个带中心抽头的变压器即可, 如图 7-13(a) 中的举例。

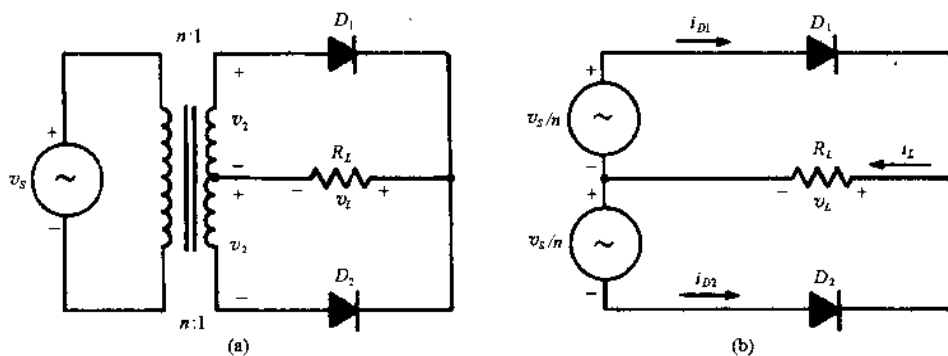


图 7-13

**例 7.7** 计算图 7-13(a) 全波整流器电路中的  $v_L$ , 把变压器和二极管看作是理想的。

**解** 图 7-13(a) 中标注为  $v_2$  的两个电压其振幅和相位是相同的。理想变压器和电压源  $v_s$  可以用两个相同的电压源替换, 如图 7-13(b) 所示, 两络平衡的电性能没有改变。当  $v_s/n$  为正时,  $D_1$  为正向偏置而导通且  $D_2$  为反向偏置而阻断; 反之, 当  $v_s/n$  为负时,  $D_2$  导通且  $D_1$  阻断。即

$$i_{D1} = \begin{cases} \frac{v_s/n}{R_L} & (v_s/n \geq 0) \\ 0 & (v_s/n < 0) \end{cases}, \quad i_{D2} = \begin{cases} 0 & (v_s/n > 0) \\ -\frac{v_s/n}{R_L} & (v_s/n \leq 0) \end{cases}$$

用 KCL, 为

$$i_L = i_{D1} + i_{D2} = \frac{|v_S/n|}{R_l}$$

因此  $v_L = R_l i_L = |v_S/n|$ 。

**例 7.8** 图 7-14(a) 的全波桥式整流器用了四个二极管。(a) 画二极管电流、负载电流、负载电压的略图。(b) 若  $v_S = V_m \sin \omega t$ , 求  $v_L$  的平均值。

**解** (a) 如果把二极管看作是理想的, 当  $v_S$  为正时的等效电路由图 7-14(b) 给出; 当  $v_S$  为负时的等效电路由图 7-14(c) 给出。图 7-14(d) 中给出了  $v_S$ 、二极管电流、负载电流  $i_L$ 、负载电压  $v_L$  的略图, 图中  $v_L = |v_S|$ 。

(b)  $v_L$  的平均值用  $v_S$  的半周内积分求出:

$$V_{L, \text{avg}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_L(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_m \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} V_m \approx 0.636 V_m$$

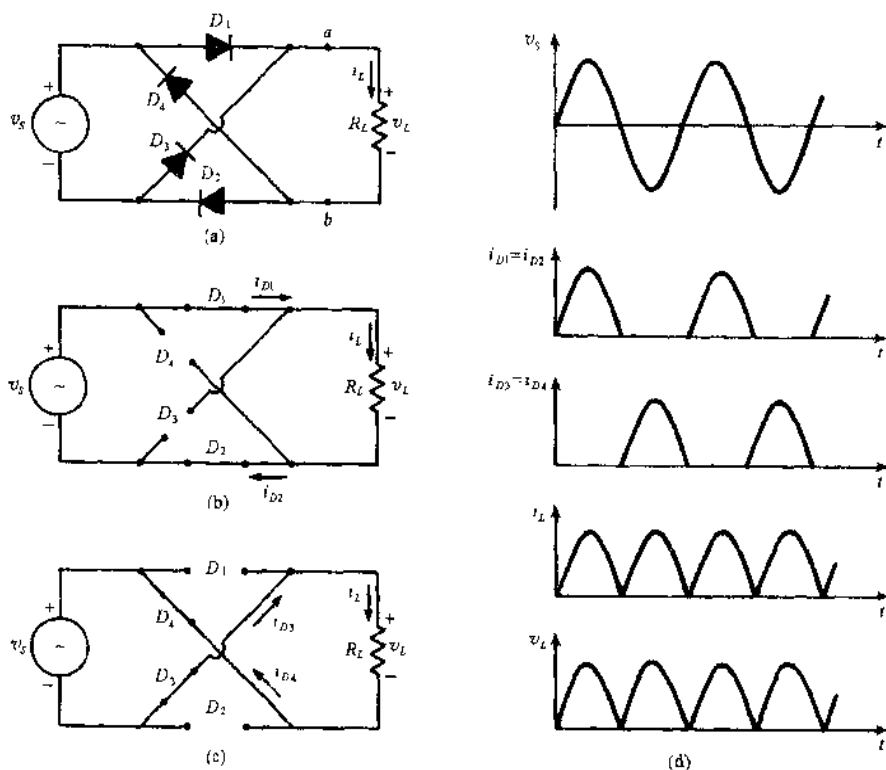


图 7-14

当整流器用于电子设备的直流电源时, 理想的是, 如负载变化, 输出电压的平均值保持近于稳定。稳定度用

$$\text{电压调整率} \equiv \frac{(\text{无载 } V_{L, \text{avg}}) - (\text{满载 } V_{L, \text{avg}})}{(\text{满载 } V_{L, \text{avg}})} \quad (7.5)$$

计量。

## 7.7 波形过滤

单独的整流器输出, 由于它的瞬时变化, 通常尚不足以用作一个电源。为了改进这种状况, 在整流器与负载之间加上一个滤波器, 其作用是从整流的波形中去掉谐波而保持直流分量。对滤波质量的量度是纹波因数,

$$F_r \equiv \frac{\text{输出电压的最大变化}}{\text{输出电压的平均值}} = \frac{\Delta v_L}{V_{L, \text{avg}}} \quad (7.6)$$

小的值  $F_r \leq 0.05$ , 通常是可达到的且适用的。

**例 7.9** 计算例 7.6 半波整流器的纹波因数, (a) 如果没有接入滤波器; (b) 如果有一个分流电容作为滤波器[图 7-15(a)]。

**解** (a)

$$F_r = \frac{\Delta v_L}{V_{L\text{avg}}} = \frac{V_{Lm}}{V_{Lm}/\pi} = \pi \approx 3.14$$

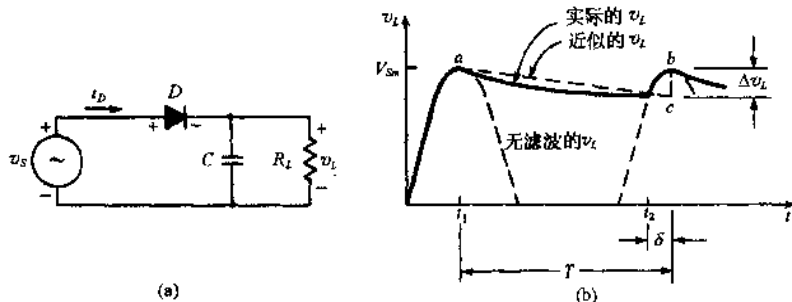


图 7-15

(b) 电容在二极管的导通期存入能量, 在二极管的阻断期输出能量。假定  $v_s = V_{sm} \sin \omega t$  且为理想二极管, 在图 7-15(b) 中绘制了有滤波器接入时的实际负载电压  $v_L$ 。当  $0 < t \leq t_1$  时,  $D$  为正向偏置, 而电容  $C$  充电至  $V_{sm}$  值。当  $t_1 < t \leq t_2$  时,  $v_s$  小于  $v_L$ , 反向偏置了  $D$  而使其相当于开路。在此期间内电容通过负载  $R_L$  放电, 给出

$$v_L = V_{sm} e^{-(t-t_1)/R_L C} \quad (t_1 < t \leq t_2) \quad (7.7)$$

在  $t_2 < t \leq t_2 + \delta$  期间,  $v_s$  正向偏置了二极管  $D$  而再次将电容充电到  $V_{sm}$ 。然后  $v_s$  下降, 低于  $v_L$  的值而又一个放电期同第一次出现的一样。

很明显, 如果时间常数  $R_L C$  比  $T$  足够大, 使衰减的效果像图 7-15(b) 所显示的那样, 就要使得, 相对于无滤波的整流器而言,  $\Delta v_L$  有较多的减小,  $V_{L\text{avg}}$  有较多的增加。引入两个很合理的近似, 导出对  $\Delta v_L$ 、 $v_{L\text{avg}}$ , 然后对  $F_r$ , 在设计和分析工作方面足够准确的简单公式:

1. 如果  $\Delta v_L$  很小, 则图 7-15(b) 中的  $\delta \rightarrow 0$ , 而  $t_2 - t_1 \approx T$ 。

2. 如果  $\Delta v_L$  足够小, 则(7.7)在  $t_1 < t \leq t_2$  期间内可表示为具有斜率值  $V_{sm}/R_L C$  的一段直线。

在图 7-15(b) 中标注为“近似  $v_L$ ”的虚线就是这两个近似的体现。由图 7-15(b) 中的三角形  $abc$ , 有

$$\frac{\Delta v_L}{T} = \frac{V_{sm}}{R_L C} \quad \text{或} \quad \Delta v_L = \frac{V_{sm}}{f R_L C}$$

式中  $f$  是  $v_s$  的频率。由于在这种近似下,

$$V_{L\text{avg}} = V_{sm} - \frac{1}{2} \Delta v_L$$

且假定  $R_L C/T = f R_L C$  很大,

$$F_r = \frac{\Delta v_L}{V_{L\text{avg}}} = \frac{2}{2f R_L C - 1} \approx \frac{1}{f R_L C} \quad (7.8)$$

如果将分流电容滤波器加至图 7-14(a) 的全波整流器上, 则同样的近似分析(在  $v_s$  的半周期内)得到纹波电压和纹波因数

$$\Delta v_L = \frac{V_{sm}}{2f R_L C}, \quad F_r = \frac{2}{4f R_L C - 1} \approx \frac{1}{2f R_L C} \quad (7.9)$$

由式(7.8)和式(7.9)看到, 当已给定了  $f R_L C$  的值时, 全波整流器输出比半波整流器输出好了一倍。

## 7.8 限幅作用和箝位作用

二极管限幅电路是在一个特定的直流电平上分离输入信号, 按要求将原有波形在电平以上的部分或在电平以下的部分不失真地传送到输出端。它们用于消除幅度干扰或者用现有的信号产生新的波形。

**例 7.10** 图 7-16(a) 举出正限幅电路的例子, 它除掉输入信号  $v_i$  中任何大于  $V_b$  的部分, 并将  $v_i$  中任何低于  $V_b$  的部分传送为输出信号  $v_o$ 。看到了当  $v_i < V_b$  时  $v_D$  为负, 使理想二极管相当于开路。没有供电流流过  $R$  的通路,  $v_i$  的值呈现在输出端, 就是  $v_o$ 。然而, 如果  $v_i \geq V_b$ , 二极管导通, 相当于短路并强迫  $v_o = V_b$ 。图 7-16(b) 的转移图或转移特性表示了输入电压与输出电压之间的关系, 这里输入取为  $v_i = 2V_b \sin \omega t$ 。

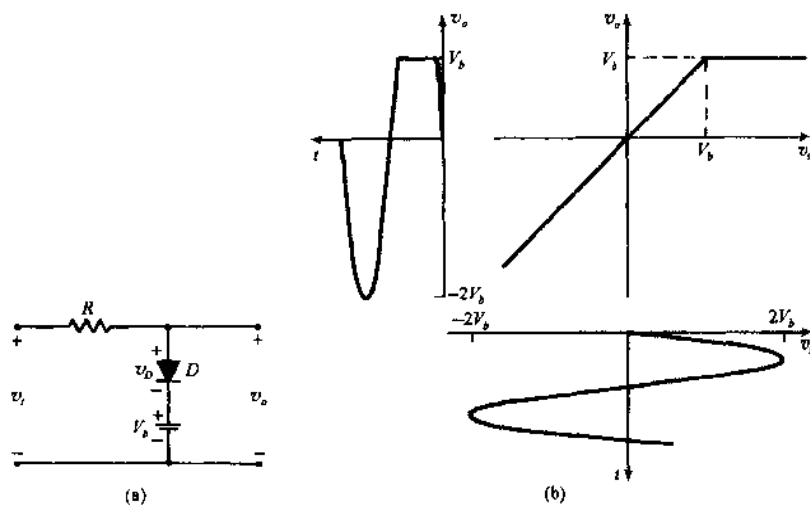


图 7-16

箝位是将输入交流波形的正峰或负峰定位在一个特设的直流电平上的过程, 而不管那些峰的任何变化。结果, 输出信号有了与输入信号不同的平均(直流)值。

**例 7.11** 在图 7-17(b) 中举出理想箝位电路的例,  $v_i$  具有三角交流波形。假定电容  $C$  是初始未充电的, 当  $0 < t \leq T/4$  时理想二极管  $D$  为正向偏置, 相当于短路, 从而电容充电到  $v_C = V_p$ 。当  $t = T/4$  时,  $D$  开路, 断开了电容仅有的放电路径, 于是保持  $v_C = V_p$  的值; 并且由于  $v_i$  决不能超过  $V_p$ , 对于全部的  $t > T/4$ ,  $D$  保持反向偏置, 得到  $v_o = v_D = v_i - V_p$ 。在图 7-17(c) 中画出了函数  $v_o$ ; 将全部正峰箝位在零处, 而平均值已由 0 移到  $-V_p$ 。

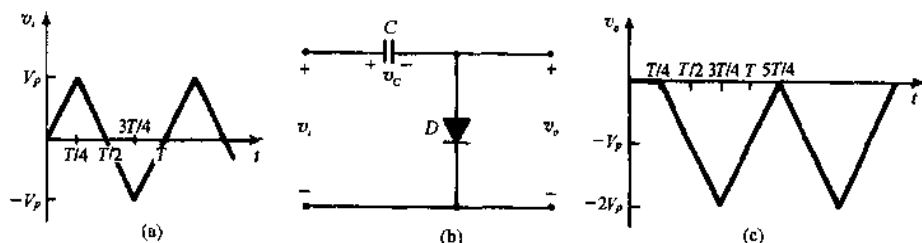


图 7-17

## 7.9 齐纳二极管

在图 7-18(a) 中用符号表示的齐纳二极管提供的主要用途为稳压器或电压基准。齐纳管的正向导通特性与整流二极管是一样的; 然而它经常以反向偏置工作, 这时它的特性是完全不同的。由图 7-18(b) 看到:



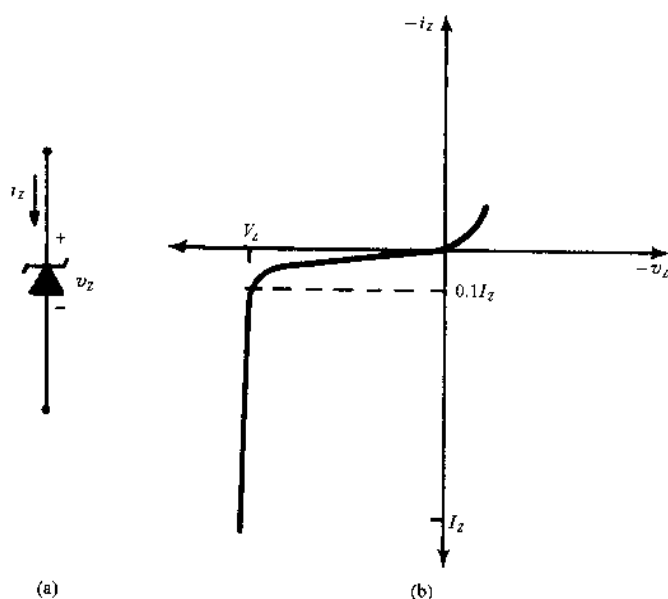


图 7-18

1. 反向击穿电压是相当地陡峭, 并且被制造过程控制到适当可预定的值。

2. 当齐纳管处于反向击穿时, 尽管电流由额定值 ( $I_Z$ ) 改变到额定值的 10% 或更小些, 它的电压却保持着非常接近于击穿值。

齐纳管稳压器应设计为使  $i_Z \geq 0.1I_Z$ , 以保证  $v_Z$  的稳定; 题 7.21 举出了设计技术的例。

### 7.10 真空二极管

图 7-19(a) 中表示了真空二极管的符号。其导通是用电子逸出阴极, 穿过内部的真空空间, 被阳极收集起来。灯丝是一个电阻热源, 用于提高阴极温度以达到出现热电子发射的程度。

图 7-19(b) 中画出了一条典型的  $i_p-v_p$  特性曲线 (板极特性)。这个特性用切尔德-朗格缪尔二分之三次方定律:

$$i_p = \kappa v_p^{3/2} \quad (7.10)$$

描述, 式中  $\kappa$  是导电系数 (取决于电子管结构设计的一个常数)。

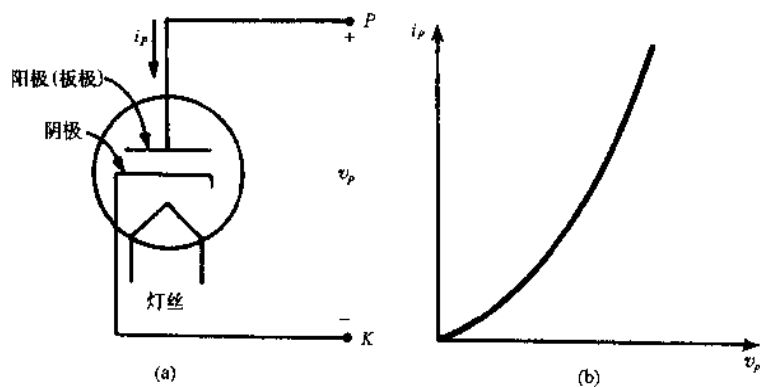


图 7-19

像半导体二极管一样, 真空二极管也是近单向的导体。然而, 真空二极管的正向电压降典型地是若干伏特, 提出理想二极管近似是不合理的。很一般, 用板极特性的直线近似得到的斜率作为一个电阻  $R_p = V_p/I_p$ , 模拟处于正向导通时的真空二极管 (图 7-20)。反向偏置的真空二极管就像开路一样。

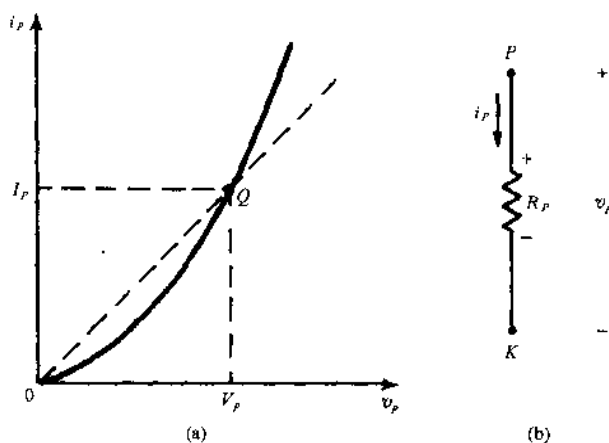


图 7-20

## 例题解答

7.1 当 25℃ 的结温时, 正向电压降( $v_D$ )在什么范围内, 式(7.1)能近似为

$$i_D \approx I_0 e^{v_D/V_T}$$

它具有小于 1% 的误差?

由式(7.1), 如果

$$e^{v_D/V_T} > 101$$

或

$$v_D > V_T \ln 101 = \frac{kT}{q} \ln 101 = \frac{(1.38 \times 10^{-23})(25 + 273)}{1.6 \times 10^{-19}} (4.6151) = 0.1186 \text{ V}$$

误差将小于 1%。

7.2 关于图 7-21(a) 的电路, 如果电源电压  $v_s$  是图 7-21(b) 所给出的那样, 试画出  $v_L$  和  $v_D$  的波形略图。二极管是理想的,  $R_L = 100 \Omega$ 。

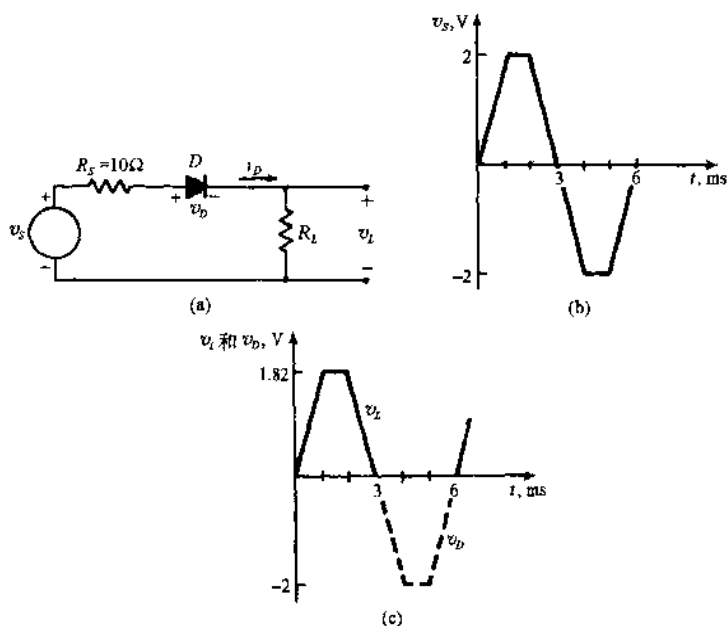


图 7-21

如果  $v_S \geq 0$ ,  $D$  导通, 使  $v_D = 0$ , 且

$$v_L = \frac{R_L}{R_L + R_S} v_S = \frac{100}{100 + 10} v_S = 0.909 v_S$$

如果  $v_S < 0$ ,  $D$  阻断, 使

$$v_D = v_S, \quad v_L = 0$$

在图 7-21(c) 中表示了  $v_D$  和  $v_L$  的略图。

7.3 关于图 7-22 的电路, 如果  $D_1$  和  $D_2$  都是理想二极管, 试求  $i_{D1}$  和  $i_{D2}$ 。

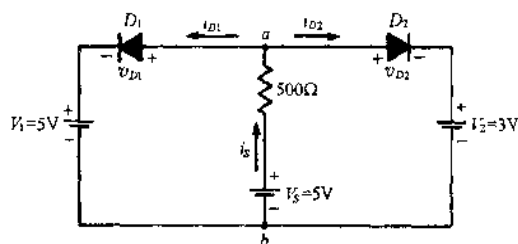


图 7-22

由于  $D_1$  和  $D_2$  的极性,  $v_S > 0$  是必然的, 于是  $v_{ab} \leq V_S = V_1$ 。但是  $v_{D1} = v_{ab} - V_1$ ; 所以,  $v_{D1} \leq 0$  且由此  $i_{D1} = 0$ , 与右回路的条件无关, 得出  $i_{D2} = i_S$ 。利用 7.3 节的分析步骤, 假定  $D_2$  为正向偏置并用短路置换它。用 KVL, 有

$$i_{D2} = \frac{V_S - V_2}{500} = \frac{5 - 3}{500} = 4\text{mA}$$

由  $i_{D2} \geq 0$ ,  $D_2$  实际为正向偏置且分析有效。

7.4 逻辑或门能够用于产生合成的波形。如果将图 7-23(b) 的三个信号施加于输入端, 试画出图 7-23(a) 中门的输出 ( $v_o$ ) 略图。

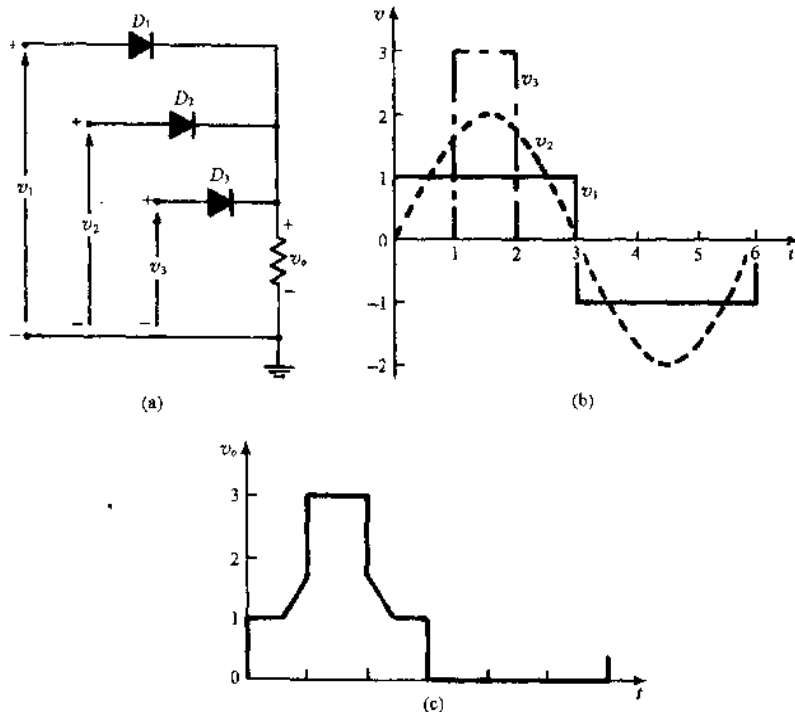


图 7-23

对于这个电路, KVL 给出

$$v_1 - v_2 = v_{D1} - v_{D2}, \quad v_1 - v_3 = v_{D1} - v_{D3}$$

即, 二极管电压与输入电压具有相同的排序。假设  $v_1$  为正且超过  $v_2$  和  $v_3$ , 于是  $D_1$  必须为正向偏置, 有  $v_{D1} = 0$ , 且必然地  $v_{D2} < 0$  和  $v_{D3} < 0$ 。因此  $D_2$  和  $D_3$  阻断, 而将  $v_1$  传送为  $v_o$ 。一般, 或门逻辑就是

将最大的正输入信号传送为  $v_o$ , 而阻断其余的输入信号。如果全部输入信号皆为负, 则  $v_o = 0$ 。应用这个逻辑, 在图 7-23(c) 中给出了  $v_o$  的略图。

7.5 如果  $v_1 = 10\sin\omega t$  (V),  $v_2 = +5$  V,  $v_3 = -5$  V, 试反接图 7-23(a) 中的二极管并画出输出电压  $v_o$  的略图。

如题 7.4 中一样, 求得  $v_o$  等于三个输入信号中的最负者。当全部输入信号为正或零时,  $v_o = 0$ , 见图 7-24。

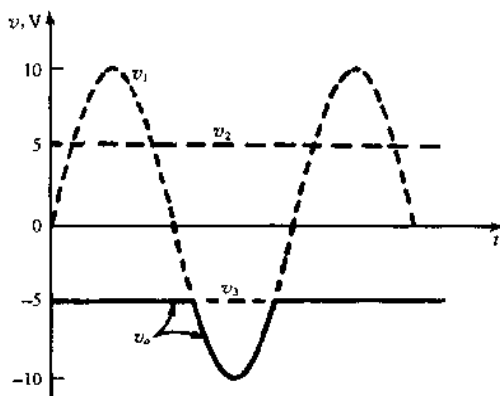


图 7-24

7.6 图 7-25(a) 电路中的二极管具有图 7-25(b) 的非线性端极特性。已知  $v_s = 0.1\cos\omega t$  (V) 和  $V_F = 2$  V, 从解析上求出  $i_D$  和  $v_D$ 。

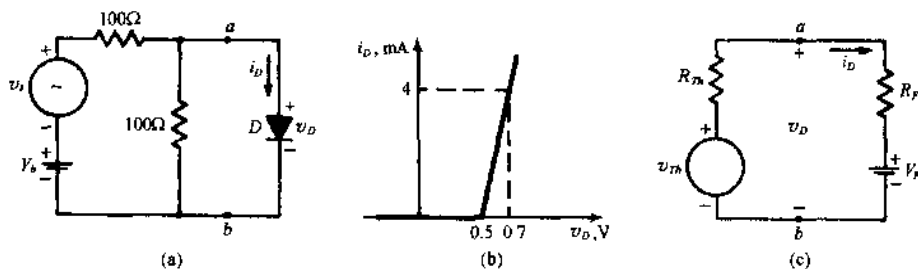


图 7-25

求出经由图 7-25(a) 中端点  $ab$  向左看的戴维南等效电路。

$$V_{th} = \frac{100}{200}(2 + 0.1\cos\omega t) = 1 + 0.05\cos\omega t \text{ (V)}, \quad R_{th} = \frac{(100)^2}{200} = 50\Omega$$

用  $V_F = 0.5$  V 和

$$R_F = \frac{0.7 - 0.5}{0.004} = 50\Omega$$

能按图 7-25(b) 模拟这个二极管。现在将戴维南等效电路和二极管模型在图 7-25(c) 中组合起来构成用于解析解法的电路, 用欧姆定律,

$$i_D = \frac{V_{th} - V_F}{R_{th} + R_F} = \frac{(1 + 0.05\cos\omega t) - 0.5}{50 + 50} = 5 + 0.5\cos\omega t \text{ (mA)}$$

$$v_D = V_F + R_F i_D = 0.5 + 50(0.005 + 0.0005\cos\omega t) \\ = 0.75 + 0.025\cos\omega t \text{ (V)}$$

7.7 用图解法解题 7.6 以求出  $i_D$ 。

在题 7.6 中已经求出戴维南等效电路。用式(7.3), 由

$$i_D = \frac{V_{th}}{R_{th}} - \frac{v_D}{R_{th}} = \frac{1}{50} - \frac{v_D}{50} = 20 - 20v_D \text{ (mA)} \quad (1)$$

给出直流负载线。在图 7-26 中, (1) 已经叠置在由图 7-25(b) 重画的二极管特性曲线上。像在例 7.4 中一样, 将对  $v_{th}$  和  $i_D$  为等价的时间标尺放置于特性曲线附近。由于二极管特性在邻近  $Q$  点的工作范围

内是线性的, 仅需取出对应于  $v_{th}$  最大值的和最小值的动态负载线。将两条动态负载线绘制为平行于直流负载线, 然后在图 7-26 上画出了  $i_D$  的略图。

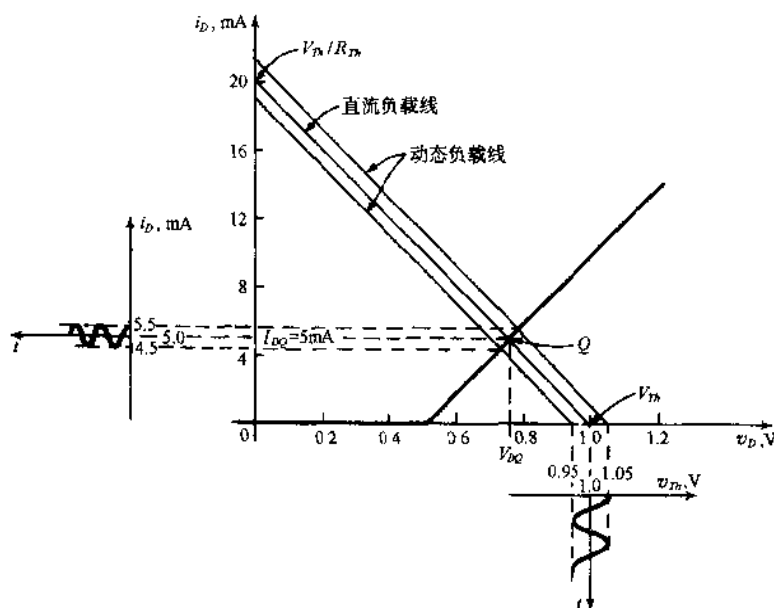


图 7-26

7.8 试用小信号等效电路法(7.5 节)求出题 7.6 中的  $i_D$  和  $v_D$ 。

题 7.6 的戴维南等效电路仍是有效的。直流负载线与图 7-26 中二极管特性曲线的交点为  $I_{DQ} = 5\text{mA}$  和  $V_{DQ} = 0.75\text{V}$ 。按照(7.4)求出动态电阻:

$$r_d = \frac{\Delta v_D}{\Delta i_D} = \frac{0.7 - 0.5}{0.004} = 50\Omega$$

全部的值对于利用图 7-11 的小信号电路进行的分析现在都是可用的。用欧姆定律,

$$i_d = \frac{v_{th}}{R_{Th} + r_d} = \frac{0.05\cos\omega t}{50 + 50} = 0.5\cos\omega t \text{ (mA)}$$

$$v_d = r_d i_d = 50(0.0005\cos\omega t) = 0.025\cos\omega t \text{ (V)}$$

$$i_D = I_{DQ} + i_d = 5 + 0.5\cos\omega t \text{ (mA)}$$

$$v_D = V_{DQ} + v_d = 0.75 + 0.025\cos\omega t \text{ (V)}$$

7.9 直接将电压源  $v_S = 0.4 + 0.2\sin\omega t$  (V) 跨接于用图 7-25(b) 表征的二极管。电源没有内阻且以本身的极性正向偏置二极管。(a) 画出二极管电流  $i_D$  的略图。(b) 求出静态电流  $I_{DQ}$  的值。

(a) 在理想电压源与二极管之间具有零电阻, 直流负载线有无限大斜率且  $v_D = v_S$ 。已将按比例  $v_S$  曲线放置在图 7-27 中二极管特性的  $v_D$  轴附近。用  $v_S$  向二极管特性上的逐点投影, 接着用其在  $i_D$  轴上的映像求出  $i_D$ 。注意  $i_D$  同  $v_S$  略微有点相似, 是非常失真的。

(b) 当交流信号为零时得到静态条件。既然如此, 当  $v_S = 0.4\text{V}$  时  $i_D = I_{DQ} = 0$ 。

7.10 关于图 7-28 的电路,  $v_S$  是周期为 4ms 的 10V 方波,  $R = 100\Omega$ ,  $C = 20\mu\text{F}$ 。如果电容是初始未充电的且二极管是理想的, 试画出在  $v_S$  的前两个周期中  $v_C$  的略图。

当  $0 \leq t < 2\text{ms}$  时,

$$v_C(t) = v_S(1 - e^{-t/RC}) = 10(1 - e^{-500t}) \text{ (V)} \quad (\text{见例 4.2})$$

当  $2 \leq t < 4\text{ms}$  时,  $D$  阻断, 而电容电压保持在

$$v_C(2\text{ms}) = 10[1 - e^{-500(0.002)}] = 6.32\text{V}$$

当  $4 \leq t < 6\text{ms}$  时,

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_S - (v_S - 6.32)e^{-(t-0.004)/RC} \\ &= 10 - (10 - 6.32)e^{-500(t-0.004)} \text{ (V)} \end{aligned}$$

当  $6 \leq t < 8\text{ms}$  时,  $D$  再次阻断, 而电容电压保持为

$$v_C(6\text{ms}) = 10 - (10 - 6.32)e^{-500(10-0.02)} \approx 8.654\text{V}$$

在图 7-29 中画出了  $v_S$  和  $v_C$  的波形略图。

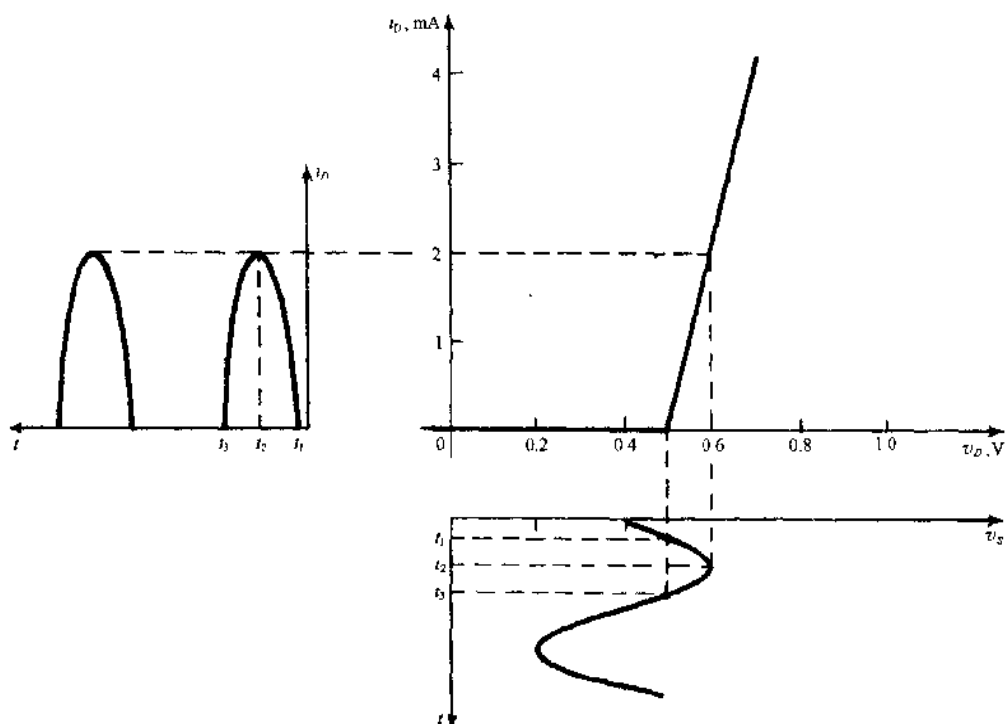


图 7-27

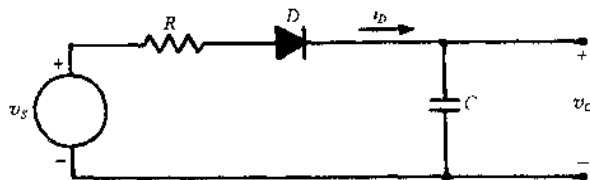


图 7-28

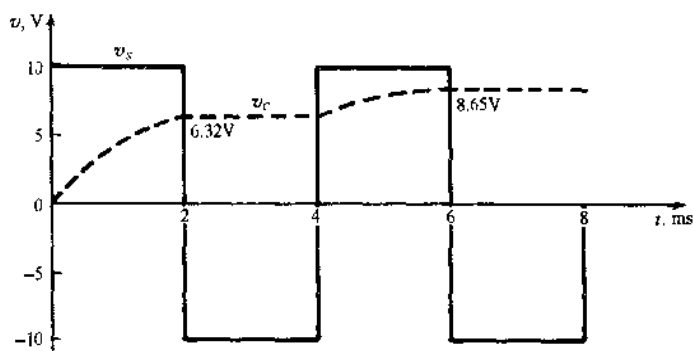


图 7-29

7.11 图 7-30(a)的电路是一个“廉价”稳压器。如果全部二极管都是相同的, 具有图 7-25(b)的特性, 当  $V_S$  由它的标称值 4V 增加到 6V 的值时, 试求出  $v_o$  的调整率。取  $R = 2\text{k}\Omega$ 。

在题 7.6 中已经确定了每一个二极管都可以用  $V_F = 0.5\text{V}$  的电池和  $R_F = 50\Omega$  的电阻串联起来进行模拟。a 点与 b 点之间的和 b 点与 c 点之间的组合二极管串列给出图 7-30(b)的电路, 电路中

$$V_{F1} = 2V_F = 1\text{V}, \quad V_{F2} = 4V_F = 2\text{V}$$

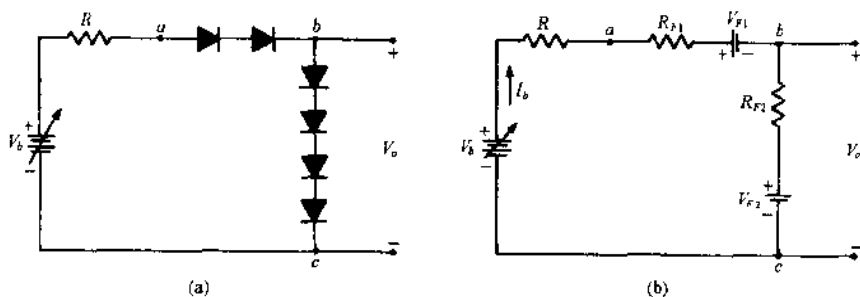


图 7-30

$$R_{F1} = 2R_F = 100\Omega, \quad R_{F2} = 4R_F = 200\Omega$$

用 KVL,

$$I_b = \frac{V_b - V_{F1} - V_{F2}}{R + R_{F1} + R_{F2}}$$

从而

$$V_o = V_{F2} + I_b R_{F2} = V_{F2} + \frac{(V_b - V_{F1} - V_{F2})R_{F2}}{R + R_{F1} + R_{F2}}$$

当  $V_{b1} = 4V$  和  $V_{b2} = 6V$  时,

$$V_{o1} = 2 + \frac{(4 - 1 - 2)(200)}{2000 + 100 + 200} = 2.09V$$

$$V_{o2} = 2 + \frac{(6 - 1 - 2)(200)}{2000 + 100 + 200} = 2.26V$$

由式(7.5)给出

$$\text{调整率} = \frac{V_{o2} - V_{o1}}{V_{o1}} \times 100\% = 8.1\%$$

**7.12** 图 7-21(a)的电路用作一个直流电源,其负载由  $10\Omega$  变至  $1k\Omega$ ;  $v_s$  是  $10V$  方波。试求出,在这种负载变化的范围内,  $v_L$  平均值的百分率改变,并对这个电路所显示调整率的性质加以说明。

令  $T$  代表  $v_s$  的周期。当  $R_L = 10\Omega$  时,

$$v_L = \begin{cases} \frac{R_L}{R_L + R_s} v_s = \frac{10}{10 + 10} \times 10 = 5V & (0 \leq t < T/2) \\ 0 \text{ (二极管阻断)} & (T/2 \leq t < T) \end{cases}$$

于是

$$V_{Lavg} = \frac{5 \times (T/2) + 0 \times T/2}{T} = 2.5V$$

当  $R_L = 1k\Omega$  时,

$$v_L = \begin{cases} \frac{R_L}{R_L + R_s} v_s = \frac{1000}{1010} \times 10 = 9.9V & (0 \leq t < T/2) \\ 0 \text{ (二极管阻断)} & (T/2 \leq t < T) \end{cases}$$

而

$$V_{Lavg} = \frac{9.9 \times (T/2) + 0}{T} = 4.95V$$

将  $R_L = 10\Omega$  作为满载,用式(7.5),

$$\text{调整率} = \frac{4.95 - 2.5}{2.5} \times 100\% = 98\%$$

对于多数的应用,这样大的调整率值是禁用的。其他电路或滤波网络将在所必需,以使这个电源成为有用。

**7.13** 如果  $v_s = 10\sin t (V)$ ,  $R_L = 2k\Omega$ , 试求图 7-14 中负载电流  $i_L$  的平均值。假定二极管如图 7-10(a)所模拟,且有  $V_F = 0.7V$ 。

当  $v_s$  正半周时的等效电路,除了每个  $D_1$  和  $D_2$  的短路要用与  $v_s$  反向的  $0.7V$  电池替换以外,就像图 7-14(b)一样。类似地,当  $v_s$  负半周时替换图 7-14(c)中的  $D_3$  和  $D_4$ 。这个电路中有两个  $0.7V$  电池,相当的二极管在  $v_s > 2V_F = 1.4V$  之前将不导通。结果,  $v_L$  的波形如图 7-31 中所描绘

的,有常数零的区域。可以算出二极管导通的开始时间  $t_1$  如下:

$$10\sin t_1 = 1.4 \quad \text{或} \quad t_1 = \arcsin 0.14 \approx 0.14\text{s}$$

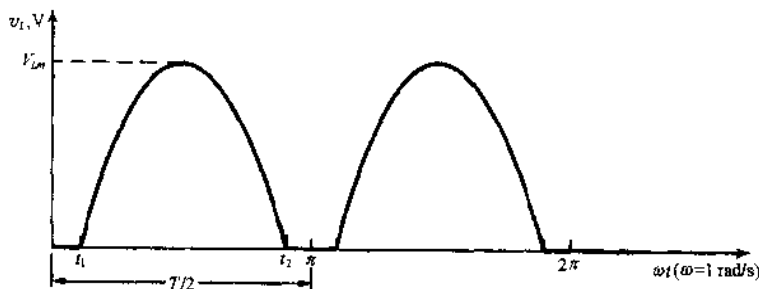


图 7-31

按对称性,  $t_2 = \pi - t_1 = 3.00\text{s}$ 。在  $[t_1, t_2]$  之间积分负载电压并除以  $T/2 = \pi$ , 求出  $v_L$  的平均值。

$$V_{L\text{avg}} = \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} (-1.4 + 10\sin t) dt = \frac{1}{\pi} [-1.4t - 10\cos t]_{0.14}^{\pi} = 5.029\text{V}$$

现在由欧姆定律给出

$$I_{L\text{avg}} = \frac{V_{L\text{avg}}}{R_L} = \frac{5.029}{2 \times 10^3} = 2.514\text{mA}$$

- 7.14 虽然  $v_S$  是纯交流信号, 但图 7-32 的电路向  $v_L$  添加了一个直流电平。如果  $v_S$  是周期为  $T$  的  $10\text{V}$  方波,  $R_2 = R_1 = 10\Omega$ , 且二极管是理想的, 试求出  $v_L$  的平均值。为了向信号添加一个直流电平, 这个电路适用吗?

当  $v_L > 0$  时,  $D$  为正向偏置, 而  $v_L = v_S = 10\text{V}$ ; 当  $v_L < 0$  时,  $D$  为反向偏置, 而

$$v_L = \frac{R_L}{R_L + R_1} v_S = \frac{10}{10 + 10} (-10) = -5\text{V}$$

于是

$$V_{L\text{avg}} = \frac{10 \times (T/2) + (-5) \times (T/2)}{T} = 2.5\text{V}$$

关于许多输入信号, 所得的输出信号将是对于平均值不对称的, 见题 7.37。

- 7.15 为了使纹波电压近似为输出电压平均值的 5%, 试设定图 7-15 整流电路中的滤波电容。二极管是理想的,  $R_L = 1\text{k}\Omega$ ,  $v_S = 90\sin 2000t (\text{V})$ 。计算这个滤波器  $v_L$  的平均值。

为使  $F_r = 0.05$ , 式(7.8)给出

$$C \approx \frac{1}{fR_L(0.05)} = \frac{1}{(2000/2\pi)(1 \times 10^3)(0.05)} = 62.83\mu\text{F}$$

因此, 在同样的近似方法下,

$$\begin{aligned} V_{L\text{avg}} &= V_{S\text{m}} - \frac{1}{2} \Delta v_L = V_{S\text{m}} - \frac{V_{S\text{m}}}{2fR_L C} \approx V_{S\text{m}} \left( 1 - \frac{0.05}{2} \right) \\ &= 90 \times 0.975 = 87.75\text{V} \end{aligned}$$

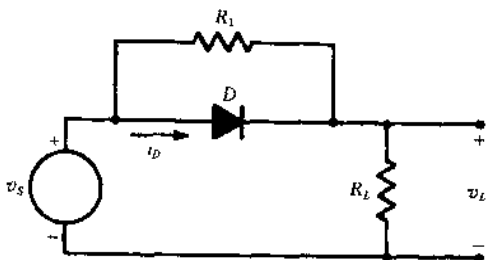


图 7-32

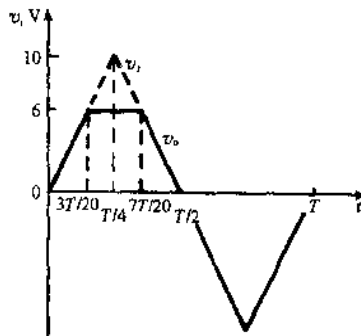


图 7-33

- 7.16 关于图 7-16(a) 的正限幅电路, 二极管是理想的且  $v_i$  是周期为  $T$  的  $10\text{V}$  三角波。如果  $V_b = 6\text{V}$ , 试画输出电压  $v_o$  一个周期的略图。



当  $v_i < 6V$  时二极管阻断或相当于开路, 得  $v_o = v_i$ 。当  $v_i \geq 6V$  时二极管为正向导通,  $v_i$  被限幅实现  $v_o = 6V$ 。图 7-33 中画出输出电压  $v_o$  的略图。

- 7.17 对于题 7.16 的正限幅网络, 画出关于  $v_o$  对  $v_i$  的转移特性。如果  $v_i = 10\sin\omega t (V)$ , 再画输出波形的一个周期略图。

当  $v_i < 6V$  时二极管阻断且当  $v_i \geq 6V$  时二极管导通。于是, 当  $v_i < 6V$  时  $v_o = v_i$  且当  $v_i \geq 6V$  时  $v_o = 6V$ 。在图 7-34(a) 中表示了转移特性。对于已知的输入信号, 输出是一个正峰在  $6V$  处被削去的正弦波, 如图 7-34(b) 中所示。

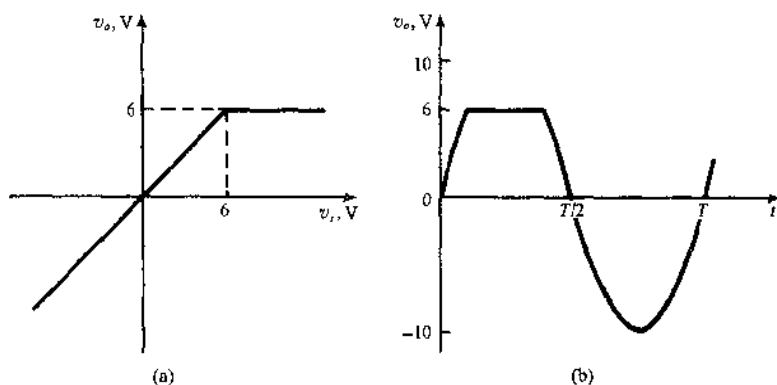


图 7-34

- 7.18 反接图 7-16(a) 中的二极管以造成一个负限幅网络。(a) 如果  $V_b = 6V$ , 画出网络转移特性。(b) 如果  $v_i = 10\sin\omega t (V)$ , 画输出波形的一个周期略图。

(a) 当  $v_i \leq 6V$  时二极管导通, 且当  $v_i > 6V$  时二极管阻断。显然, 当  $v_i > 6V$  时  $v_o = v_i$ , 且当  $v_i \leq 6V$  时  $v_o = 6V$ 。在图 7-35(a) 中画出了转移特性。

(b) 有了负限幅, 输出就是形成  $10\sin\omega t$  在  $6V$  之上的正峰, 而其他时间保持在  $6V$ 。图 7-35(b) 表示了输出波形。

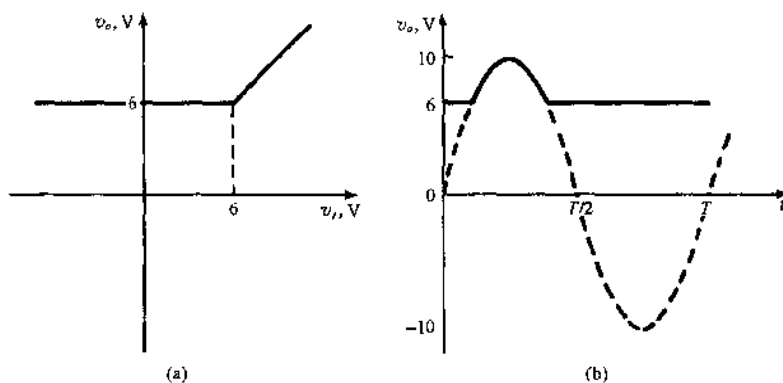


图 7-35

- 7.19 信号  $v_i = 10\sin\omega t (V)$  施加至图 7-17(b) 的负箝位电路上。将二极管当作是理想的, 画出在  $v_i$  的  $1\frac{1}{2}$  周中输出波形的略图。电容是初始未充电的。

当  $0 \leq t \leq T/4$  时, 二极管为正向偏置, 得到  $v_o = 0$ , 那么电容达到  $v_C = +10V$ 。当  $T > T/4$  时,  $v_o \leq 0$ , 于是二极管保持为阻断模式, 结果是

$$v_o = -v_C + v_i = -10 + v_i = -10(1 - \sin\omega t) (V)$$

在图 7-36 中画出了  $v_o$  的波形略图。

- 7.20 画出当 (a) 开关断开时, (b) 开关接通时, 图 7-37(a) 网络的  $i-v$  输入特性略图。

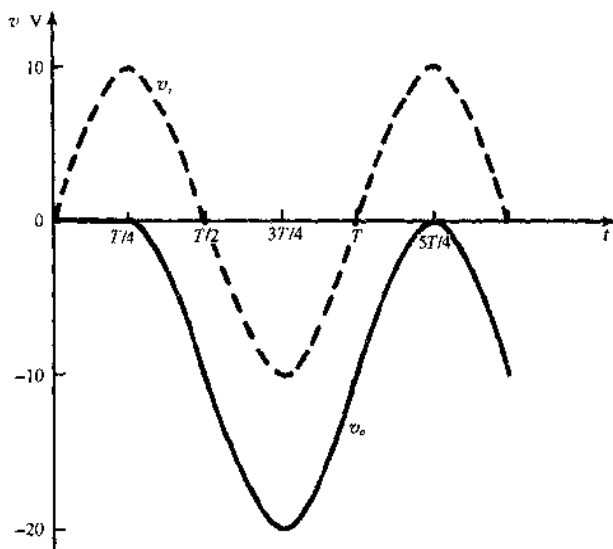


图 7-36

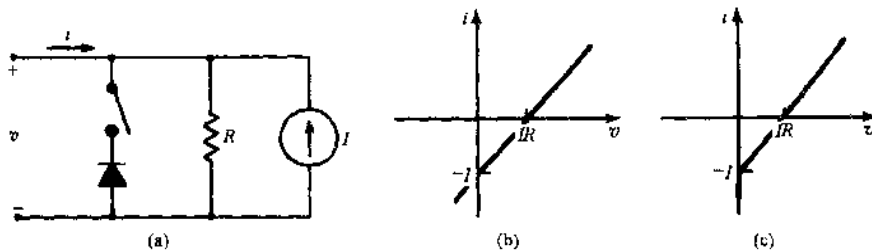


图 7-37

如果获得了电流源和电阻所给出  $V_{th} = IR$  和  $R_{th} = R$  的戴维南等效电路,就很容易求出解答。

(a) KVL 给出  $v = iR_{th} + V_{th} = iR + IR$ , 这是截  $i$  轴于  $-I$  并截  $v$  轴于  $+IR$  的直线方程。在图 7-37(b) 中画出了这个特性的略图。

(b) 当  $v > 0$  时, 二极管为反向偏置或相当于开路。得到, 如果  $v > 0$ ,  $i-v$  特性与开关断开时的相同。另一方面, 如果  $v \leq 0$ , 二极管为正向偏置, 相当于短路。显然  $v$  决不能达到负值, 而电流  $i$  能无限制地负增长。在图 7-37(c) 中画出了对应的  $i-v$  曲线略图。

**7.21** 当  $75\text{mA} \leq i_z \leq 1\text{A}$  时, 图 7-38 稳压器电路中的齐纳二极管有恒定的反向击穿电压  $V_Z = 8.2\text{V}$ 。如果  $R_L = 9\Omega$ , 当  $V_o$  由它的标称值  $12\text{V}$  变化  $\pm 10\%$  时, 设定能使  $v_L$  稳定至  $8.2\text{V}$  的  $R_S$ 。

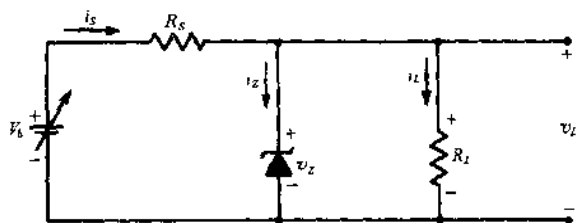


图 7-38

由欧姆定律,

$$i_L = \frac{v_Z}{R_L} = \frac{V_Z}{R_L} = \frac{8.2}{9} = 0.911\text{A}$$

应用 KVL, 得

$$R_S = \frac{V_b - V_Z}{i_Z + i_L} \quad (1)$$

为了在最大的  $V_b$  时齐纳电流( $i_Z$ )取最大值,用(1)设定  $R_S$ ,

$$R_S = \frac{(1.1)(12) - 8.2}{1 + 0.911} \approx 2.62\Omega$$

进行验算,看看在最低的  $V_b$  值时  $i_Z > 75\text{mA}$  的假定:

$$i_Z = \frac{V_b - v_Z}{R_S} - i_L = \frac{(0.9)(12) - 8.2}{2.62} - 0.911 = 81.3\text{mA}$$

由于  $i_Z > 75\text{mA}$ ,  $v_Z = V_Z = 8.2\text{V}$ ,维持了稳压。

**7.22** 图 7-39(a)整流器电路中的真空二极管是相同的,在正方向可用  $R_F = 400\Omega$  模拟且在反方向可用无限大电阻模拟。如  $C = 0$ ,  $R_L = 5\text{k}\Omega$ ,  $V_{L\text{avg}} = 110\text{V}$ ,  $v_S = 120\sqrt{2} \sin 120\pi t (\text{V})$ , 试计算理想变压器的匝数比。

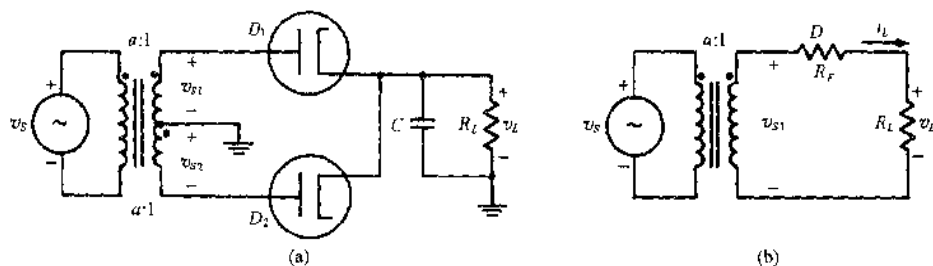


图 7-39

用题目的对称性,仅需分析如图 7-39(b)中所表示整流器电路的一个臂。因为输出是整流的正弦波,由此(例 7.8)  $V_{L\text{avg}} = 0.636 V_{Lm}$ , 可以写出下面的负载电压表达式:

$$v_L(t) = \frac{110}{0.636} \sin 120\pi t = 172.96 \sin 120\pi t (\text{V}) \quad [0 \leq t < (1/120)\text{s}]$$

用欧姆定律,有

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{v_L(t)}{R_L} \approx \frac{172.96}{5000} \sin 120\pi t \\ &\approx 0.03459 \sin 120\pi t (\text{A}) \quad [0 \leq t < (1/120)\text{s}] \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} v_{D1}(t) &= R_F i_L(t) = (400)(0.03459 \sin 120\pi t) \\ &= 13.84 \sin 120\pi t (\text{V}) \quad [0 \leq t < (1/120)\text{s}] \end{aligned}$$

现在

$$v_{S1}(t) = v_{D1}(t) + v_L(t) = 186.8 \sin 120\pi t (\text{V}) \quad [0 \leq t < (1/120)\text{s}]$$

得到匝数比为

$$a = \frac{v_S}{v_{S1}} = \frac{120\sqrt{2}}{186.8} = 0.908$$

**7.23** 用理想二极管、电阻、电池综合一个函数发生器,使能得到在图 7-40(a)中所描绘的  $i-v$  特性。

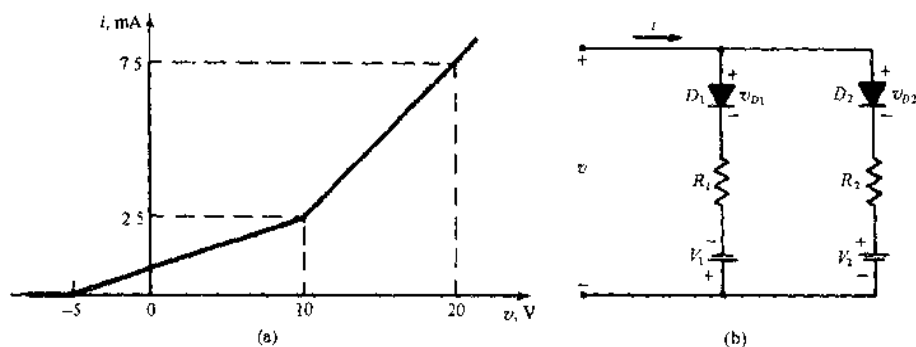


图 7-40

由于  $i-v$  特性有两个断点, 而需要两个二极管。必须将两个二极管都取向为当  $v < -5V$  时没有电流流过。进而, 某个二极管必须在第一个断点  $v = -5V$  时进入正向偏置, 而第二个二极管必须在  $v = +10V$  时再导通。 $i-v$  曲线的斜率是网络有效部分的戴维南等效电阻的倒数。如果  $R_1 = 6k\Omega$ ,  $R_2 = 3k\Omega$ ,  $V_1 = 5V$ ,  $V_2 = 10V$ , 图 7-40(b) 的电路就是  $i-v$  曲线的一个综合。下面求出这些值:

1. 如  $v < -5V$ , 则  $v_{D1}$  和  $v_{D2}$  皆为负, 两个二极管皆阻断, 没有电流流过。

2. 如  $-5 \leq v < 10V$ , 则  $D_1$  为正向偏置且可用短路置换, 而  $v_{D2}$  为负, 使  $D_2$  相当于开路。按斜率倒数求得  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{10 - (-5)}{0.0025} = 6k\Omega$$

3. 如  $v \geq 10V$ , 则两个二极管皆为正向偏置且

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\Delta v}{\Delta i} = \frac{20 - 10}{(7.5 - 2.5) \times 10^{-3}} = 2k\Omega$$

解  $R_2$  得

$$R_2 = \frac{R_1 R_n}{R_1 - R_n} = \frac{(6 \times 10^3)(2 \times 10^3)}{4 \times 10^3} = 3k\Omega$$

### 补充习题

7.24 一个硅二极管处在  $T = 300K$ , 具有饱和电流  $I_s = 10nA$ 。(a) 如果正向压降 ( $v_D$ ) 为  $0.5V$ , 求出正向电流 ( $i_D$ )。 (b) 设这个二极管额定为  $5A$  的最大值电流, 如果正向压降为  $0.7V$ , 问在额定电流时结温是多少?

答 (a)  $2.47A$ ; (b)  $405.4K$

7.25 题 7.24 的二极管工作在某电路中, 在那里它具有动态电阻  $r_d = 100\Omega$ 。问静态条件必须是什么?

答  $V_{DQ} = 0.263V$ ,  $I_{DQ} = 0.259mA$

7.26 题 7.24 的二极管具有正向电流  $i_D = 2 + 0.004 \sin \omega t$  (mA)。求二极管两端的总电压  $v_D = V_{DQ} + v_d$ 。

答  $v_D = 339.5 + 0.0207 \sin \omega t$  (mV)

7.27 如果二极管是理想的且  $v_S = 10 \sin \omega t$  (V), 求出图 7-21(a) 电路负载电阻  $R_L = 100\Omega$  中消耗的功率。

答  $206.6mW$

7.28 图 7-41(a) 的逻辑与门具有到达门输入处的输入脉冲序列, 如图 7-41(b) 所示。信号  $v_2$  是不稳定的, 有时电压降低到标称逻辑电平以下, 试求出  $v_o$ 。

答  $10V(1 \leq t \leq 2ms)$ ,  $5V(4 \leq t \leq 5ms)$ , 其他时间为零

7.29 图 7-41(a) 的逻辑与门是用于以进入的  $v_1 = 10 \sin \omega t$  (V) 和  $v_2 = 5V$  产生粗略的脉冲序列。试求 (a) 幅度, (b) 呈现为  $v_o$  的脉冲序列的周期。

答 (a)  $5V$ ; (b)  $2\pi/\omega$

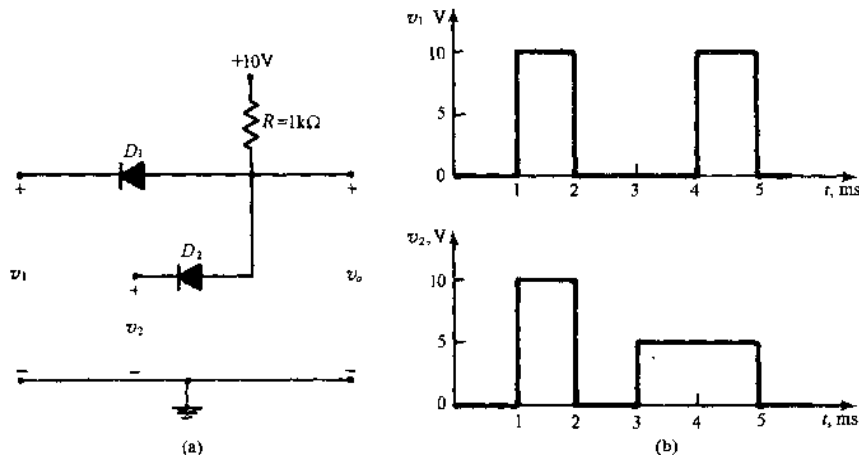


图 7-41

7.30 关于图 7-28 的电路,  $v_S$  是  $4ms$  周期的  $10V$  方波。二极管是非理想的, 具有图 7-25(b) 的特性。如果电

容是初始未充电的,试求在  $v_s$  第一周中的  $v_C$ 。

$$\text{答 } v_C = \begin{cases} 9.5(1 - e^{-333.3t}) \text{ (V)} & (0 \leq t < 2\text{ms}) \\ 4.62\text{V} & (2 \leq t < 4\text{ms}) \end{cases}$$

- 7.31 如果二极管是非理想的,具有图 7-42 中所示的特性,试求解题 7.16。

答 除了  $(3T/20, 7T/20)$  区间以外,  $v_o$  与图 7-33 中的相同。 $v_o$  从  $3T/20$  时的 6V 到  $T/4$  时的 7.33V 为线性增加,然后到  $7T/20$  时的 6V 为线性减小。

- 7.32 题 7.24 二极管的正向端电压为  $v_D = 0.3 + 0.060\cos\omega t$  (V)。试求二极管电流 ( $i_D$ ) 的交流分量。

$$\text{答 } 2.52\cos\omega t \text{ (mA)}$$

- 7.33 图 7-43(a) 的电路是一个倍压电路,有时用于负载电阻相当恒定时低电平电源。因为  $v_L$  的稳态峰值是正弦电源电压峰值的二倍,所以称“倍”。图 7-43(b) 是当  $v_S = 10\cos\omega t$  (V) 时稳态输出电压的略图。假定理想二极管,  $\omega = 377\text{rad/s}$ ,  $C_1 = 200\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10\mu\text{F}$ ,  $R_L = 1\text{k}\Omega$ 。(a) 用试凑超越方程来求解衰减时间  $t_d$ 。(b) 计算纹波电压的峰-峰值。

$$\text{答 (a)} 15.2\text{ms}; \text{(b)} 1.46\text{V}$$

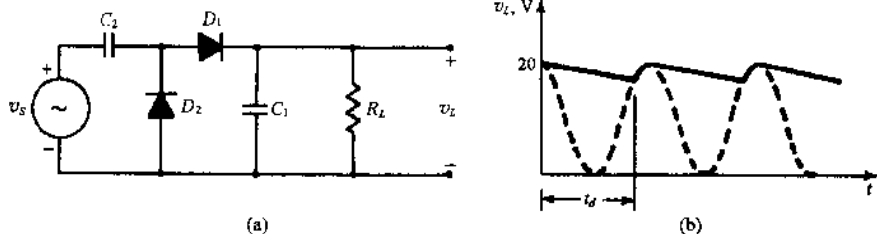


图 7-43

- 7.34 如果  $C = 47\mu\text{F}$ ,  $R_L = 1\text{k}\Omega$ ,  $v_S = 90\cos 2000t$  (V), 计算图 7-15(a) 整流电路在一个电容充电周期内的二极管电流。(提示: 不能用近似纹波公式, 因为它隐含假定了电容充电时间为零。代之以解出电容电流和负载电流并相加。)

$$\text{答 } i_D = -8.49\sin(2000t - 0.6^\circ) \text{ (A)} \quad (2.966 \leq t < 3.142\text{ms})$$

- 7.35 将  $470\mu\text{F}$  滤波电容跨接至图 7-14(a) 电路中的  $ab$  点, 做成一个峰值整流电路。如果  $R_L = 2\text{k}\Omega$ ,  $v_S = 100\sin 100t$  ① (V), (a) 求出纹波电压的量值(峰-峰), (b) 计算  $v_L$  的平均值。

$$\text{答 (a)} 3.34\text{V}; \text{(b)} 98.33\text{V}$$

- 7.36 关于图 7-39(a) 的电路,  $v_S = 120\sqrt{2}\sin 120\pi t$  (V),  $R_L = 10\text{k}\Omega$ ,  $a = 2$ 。按 2% 的纹波设定电容。可用  $300\Omega$  的正向电阻和无限大的反向电阻模拟两个相同的二极管。试求出 (a)  $C$  的值, (b)  $v_L$  的平均值。

$$\text{答 (a)} 41.67\mu\text{F}; \text{(b)} 81.55\text{V}$$

- 7.37 关于图 7-32 的电路,  $R_1 = R_L = 10\Omega$ 。如果二极管是理想的且  $v_S = 10\sin\omega t$  (V), 试求负载电压  $v_L$  的平均值。

$$\text{答 } 3.18\text{V}$$

- 7.38 如果图 7-17(b) 的二极管被反接, 其他全保持不变, 研究题 7.19。(现在这个电路是正箝位电路。)

$$\text{答 } v_o = \begin{cases} 10\sin\omega t \text{ (V)} & (0 \leq t < T/2) \\ 0 & (T/2 \leq t < 3T/4) \\ 10(1 - \sin\omega t) \text{ (V)} & (t \geq 3T/4) \end{cases}$$

- 7.39 在实际应用中, 图 7-17(b) 箝位电路的输出必须连接至一个负载 ( $R_L$ ) 上, 得到图 7-44 的电路。如果  $C = 4\mu\text{F}$ ,  $R_L = 5\text{k}\Omega$ , 二极管具有图 7-42 的特性,  $v_S$  是周期为 2ms 的 10V 方波。求出在  $v_S$  的第一周内, (a)  $v_L$  的表达式, (b)  $v_C$  的表达式。

① 原著中为  $\sin\omega t$ 。——译者注

答 (a)  $v_C = \begin{cases} 10e^{-5000t} \text{ (V)} & (0 \leq t < 1\text{ms}) \\ 19.94e^{-50(t-0.001)} \text{ (V)} & (1 \leq t < 2\text{ms}) \end{cases}$ ; (b)  $v_C = |10 - v_L| \text{ (V)}$

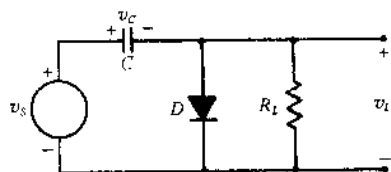


图 7-44

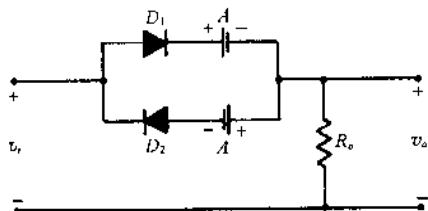


图 7-45

- 7.40 不论输入信号的极性,直到输入达到一个阈值之前,电平鉴别器电路(图 7-45)具有零输出。在阈值之上,输出与输入一模一样。这种电路有时可用于在少量失真的损失下消除低电平干扰的效果。示出  $v_o$  与  $v_i$  的关系。

答  $v_o = \begin{cases} v_i(1 - A/|v_i|) & (|v_i| > A) \\ 0 & (|v_i| \leq A) \end{cases}$

- 7.41 如果将图 7-37(a)的二极管反接而其他全保持原样,写出当(a)开关断开时,(b)开关接通时联系  $v$  与  $i$  的方程。

答 (a)  $v = R(i + I)$ ; (b) 当  $i < I$  时  $v = R(i + I)$ , 当  $i > I$  时  $v = 0$

- 7.42 图 7-38 稳压电路的齐纳二极管具有在  $i_Z$  的最小值 15mA 的  $v_Z = V_Z = 18.6\text{V}$ 。如果  $V_b = 24 \pm 3\text{V}$ ,  $R_L$  从  $250\Omega$  变到  $2\text{k}\Omega$ , (a)求出为了保持稳压的  $R_s$  最大值, (b)确定这个齐纳二极管的额定功率最小值。

答 (a)  $26.8\Omega$ ; (b)  $5.65\text{W}$

- 7.43 用两个串联的齐纳二极管替换一个齐纳二极管,改变图 7-38 的稳压电路以获得  $20\text{V}$  的稳定电压。这两个齐纳管的特性为:

齐纳 1  $V_Z = 9.2\text{V}$  ( $15 \leq i_Z \leq 300\text{mA}$ );

齐纳 2  $V_Z = 10.8\text{V}$  ( $12 \leq i_Z \leq 240\text{mA}$ )。

- (a)如果  $i_L$  由  $10\text{mA}$  变至  $90\text{mA}$ , 且  $V_b$  由  $22\text{V}$  变至  $26\text{V}$ , 设定维持稳压的  $R_s$ 。(b)能超过其中一个齐纳管的额定电流吗?

答 (a)  $19.6\Omega$ 。(b)当  $V_b = 26\text{V}$  时  $i_{Z1} = i_{Z2} = 296\text{mA}$ , 这超过了齐纳 2 的额定

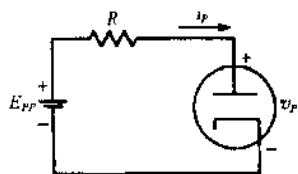


图 7-46

- 7.44 图 7-46 的真空二极管具有板极特性  $i_p = 0.08v_p^{3/2} \text{ (mA)}$ 。如果  $E_{PP} = 50\text{V}$ ,  $R = 2.5\text{k}\Omega$ , 试计算板极电流的值。

答  $10\text{mA}$

- 7.45 在普通的输系上画出用  $i_p = 1.00v_p^{3/2} \text{ (mA)}$  描述的真空二极管正向特性和用  $i_D = 10^{-5}e^{40v_D} \text{ (mA)}$  描述的半导体二极管正向特性的略图, 正向电流的值由零至  $100\text{mA}$ 。从你的略图看, 两个器件之间明显的主要差别是什么?

答  $(i, v_p, v_D) = (0, 0, 0), (20, 7.4, 0.362), (60, 15.3, 0.39), (100, 21.5, 0.403)$

- 7.46 模仿(7.4), 真空二极管的动态电阻用

$$r_p = \left. \frac{dv_p}{di_p} \right|_Q = \frac{V_p}{I_p}$$

定义。如果一个真空二极管具有静态板极特性  $i_p = 0.08v_p^{3/2} \text{ (mA)}$  并工作于静态板极电流  $I_p = 15\text{mA}$ , 试计算(a)静态板极电压( $V_p$ ), (b)动态电阻( $r_p$ )。

答 (a)  $32.76\text{V}$ ; (b)  $1456\Omega$

- 7.47 图 7-47 的两个齐纳二极管具有可忽略的正向压降, 且当  $50 \leq i_Z \leq 500\text{mA}$  时二者皆调整为恒定的  $V_Z$ 。如果  $R_1 = R_2 = 10\Omega$ ,  $V_{Z1} = 8\text{V}$ ,  $V_{Z2} = 5\text{V}$ , 当  $v_i$  是  $10\text{V}$  方波时, 试求负载电压的平均值。

答  $0.75\text{V}$

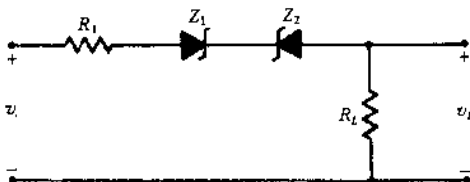


图 7-47

第8章 双极结晶体管

8.1 双极结晶体管的结构和符号

双极结晶体管(BJT)是由交替的 n 半导体材料层与 p 半导体材料层进行冶金结合制成的三单元器件(发射极、基极、集电极),如图 8-1。晶体管可以是 pnp 型的(主要靠正的空穴导电)或是 npn 型的(主要靠负的电子导电)。用图 8-1 表示了每种型式的实际构造,以及用示意符号表明的电流正方向。关于端极电压,利用了双下标符号;例如  $v_{BE}$  代表由发射极 E 端至基极 B 端的电位增加。由于后面的明显理由,端极电流或端极电压通常包括叠加起来的直流分量和交流分量(一般是正弦信号)。表 8-1 规定了用于端极电压和端极电流的符号。

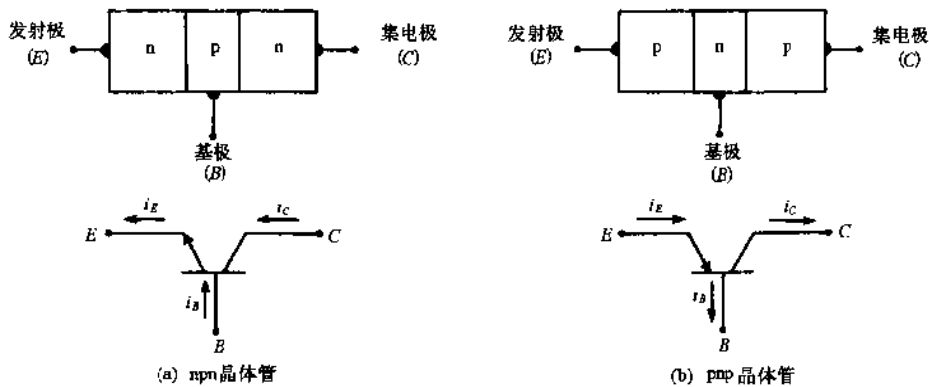


图 8-1

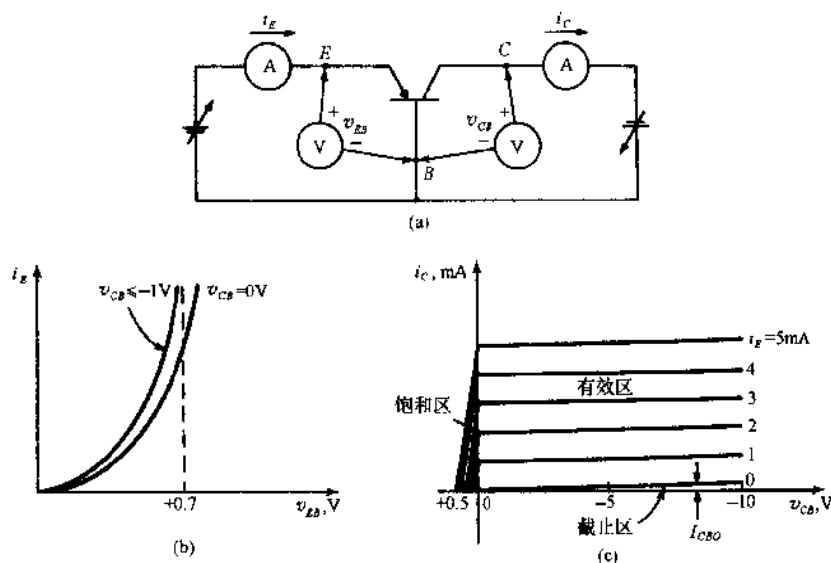
表 8-1

值的型式	符号		例
	变量	下标	
总瞬时值	小写	大写	$i_B, v_{BE}$
直流	大写	大写	$I_B, V_{BE}$
静态点	大写	大写加 Q	$I_{BQ}, V_{BEQ}$
交流瞬时值	小写	小写	$i_b, v_{be}$
方均根值	大写	小写	$I_b, V_{be}$
最大值(正弦)	大写	小写加 m	$I_{bm}, V_{bom}$

8.2 共基极特性

共基极(CB)连接指的是一种双口的晶体管接法,由基极与输入端、输出端共用一个公共点。独立输入变量是发射极电流( $i_E$ )和基极至发射极电压( $v_{EB}$ )。对应的独立输出变量是集电极电流( $i_C$ )和基极至集电极电压( $v_{CB}$ )。实际的 CB 晶体管分析是基于两个用实验确定的曲线族:

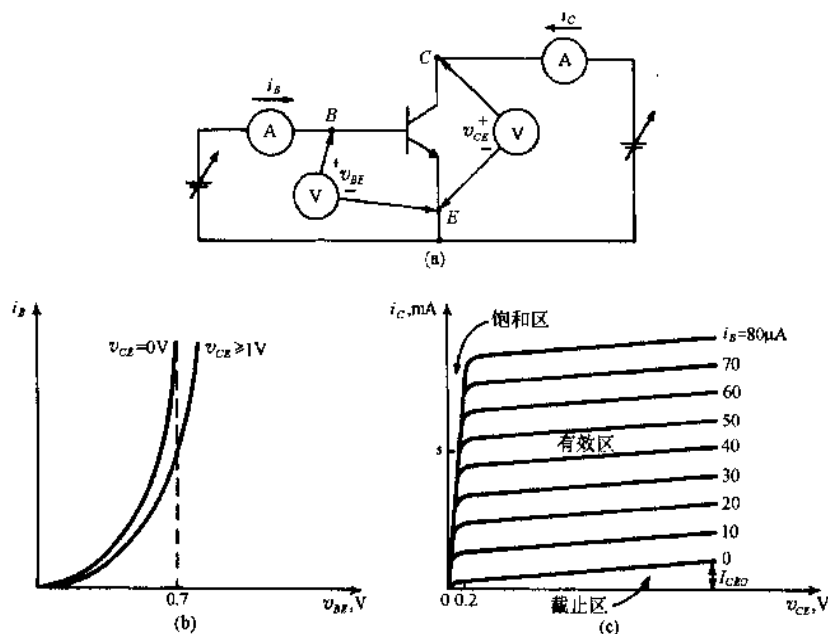
1. 输入特性或转移特性表示当  $v_{CB}$  (口输出变量)保持恒定时的  $i_E$  与  $v_{EB}$  (口输入变量)的关系。在图 8-2(a)中表明了实验测量的方法。所得曲线族的典型形式被描绘在图 8-2(b)中。
2. 输出特性或集电极特性给出当  $i_E$  (口输入变量)为恒定值时的  $i_C$  为  $v_{CB}$  (口输出变量)的函数,利用图 8-2(a)举例的试验原理。典型的所得曲线族示于图 8-2(c)中。

图 8-2<sup>①</sup> 共基极特性(pnp 硅器件)

### 8.3 共发射极特性

发射极与输入端、输出端共用一个公共点的一种双口的晶体管接法(因为它大的功率放大而应用广泛)就是共发射极(CE)连接。独立口输入变量是基极电流( $i_B$ )和发射极至基极电压( $v_{BE}$ ),独立口输出变量是集电极电流( $i_C$ )和发射极至集电极电压( $v_{CE}$ )。就像 CB 分析,CE 分析是基于:

1. 输入特性或转移特性表示当  $v_{CE}$  保持恒定时口输入变量( $i_B$  和  $v_{BE}$ )的关系。图 8-3(a)表示测量装置,图 8-3(b)是所得的输入特性。

图 8-3<sup>②</sup> 共发射极特性(npn 硅器件)

2. 输出特性或集电极特性表示当  $i_B$  恒定时口输出变量( $i_C$  和  $v_{CE}$ )之间的函数关系,利用

① 原著(c)图中标注  $I_{CB0}$ 。——译者注

② 原著(c)图中标注  $I_{CB0}$ 。——译者注



图 8-3(a)提供的试验原理。图 8-3(c)表示了典型的集电极特性。

#### 8.4 电流和放大

可以独立地偏置 BJT 的两个 pn 结,表 8-2 中总计了晶体管的四种可能工作模式。当经由 n 材料至 p 材料为电位升高时,就是正向结偏置的条件;反之如果 n 区处于比 p 区较高的电位时,结就是反向偏置的。

表 8-2

射-基偏置	集-基偏置	工作偏置
正向	正向	饱和
反向	反向	截止
反向	正向	反接
正向	反向	线性或有效

饱和表示一个工作区(对硅器件 $|v_{CE}| \approx 0.2V$ 且 $|v_{BE}| \approx 0.5V$ ),在其中为最大的集电极电流,而晶体管的作用很像一个从集电极端到发射极端接通的开关。

截止表示邻近集电极特性电压轴的一个工作区,在其中晶体管的作用很像一个断开的开关。在这个工作模式中仅流过漏电流(与二极管的 $I_0$ 相似);于是当为 CB 连接时 $i_C = I_{CBO}^{①} \approx 0$ ,当为 CE 连接时 $i_C = I_{CBO}^{②} \approx 0$ 。图 8-2(c)和图 8-3(c)表示了漏电流。

当发射极与集电极互换时的反接模式是几乎无用的,低效能的有效模式。

有效或线性模式描述晶体管工作在图 8-2(c)和图 8-3(c)中饱和之右和截止以上的区域;这里具有端极电流之间近线性的关系。当为直流电流时定义比例常数为

$$\alpha (\equiv h_{FB}) \equiv \frac{I_C - I_{CBO}}{I_E} \quad (8.1)$$

$$\beta (\equiv h_{FE}) \equiv \frac{\alpha}{1 - \alpha} \equiv \frac{I_C - I_{CBO}}{I_B} \quad (8.2)$$

式中热致的漏电流有

$$I_{CBO} = (\beta + 1)I_{EBO} \quad (8.3)$$

关系。常数 $\alpha < 1$ 是对从发射极注入到基极区而被集电极接收的多数载流子(对 pnp 是空穴,对 npn 是电子)所占比例的计量。式(8.2)是 BJT 的直流电流放大特性;忽略漏电流,将基极电流增加即放大 $\beta$ 倍就成为集电极电流。在直流条件下将 KCL 应用于晶体管得到

$$I_E = I_C + I_B \quad (8.4)$$

此式连同(8.1)一直到(8.3)一起,完全描述了 BJT 在有效模式中的直流电流关系。

**例 8.1** 一个 BJT 具有 $\alpha = 0.99$ , $i_B = I_B = 25\mu A$ , $I_{CBO} = 200nA$ 。求出(a)直流集电极电流,(b)直流发射极电流。(c)求出当忽略漏电流时发射极电流中的百分率误差。

**解** (a)当 $\alpha = 0.99$ ,由式(8.2)得出

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 99$$

在式(8.2)中用式(8.3),于是得出

$$I_C = \beta I_B + (\beta + 1)I_{CBO} = 99(25 \times 10^{-6}) + (99 + 1)(200 \times 10^{-9}) = 2.495mA$$

(b)由式(8.1)得出直流发射极电流:

$$I_E = \frac{I_C - I_{CBO}}{\alpha} = \frac{2.495 \times 10^{-3} - 200 \times 10^{-9}}{0.99} = 2.518mA$$

(c)忽略漏电流, $I_B = (25 \times 10^{-6}) - (200 \times 10^{-9}) = 24.8\mu A$ 。

因此  $I_C = \beta I_B = 99(24.8 \times 10^{-6}) = 2.455mA$ ,  $I_E = \frac{I_C}{\alpha} = \frac{2.455}{0.99} = 2.48mA$

①原著中为 $I_{CBO}$ ;②原著中为 $I_{CBO}$ 。——译者注

得到发射极电流误差

$$\frac{2.518 - 2.48}{2.518} \times 100\% \approx 1.51\%$$

仿照式(8.1)和式(8.2)定义关于交流或小信号的比例常数,或短路正向增益常数:

$$h_{fb} \equiv \frac{i_c}{i_e} \quad (8.5)$$

$$h_{fe} \equiv \frac{i_c}{i_b} \quad (8.6)$$

一般  $h_{fe} \neq h_{FE}$ ,  $h_{fb} \neq h_{FB}$ ; 然而为了简单,除非晶体管工作发生在有效区的边界附近,都假定它们的数值相等。

### 8.5 恒发射极电流偏置

偏置(设置有效模式工作的一个期望点,晶体管的特定直流端极电压和端极电流,称为静态点或Q点)可以分为 $\beta$ 相关的(见题8.9和8.12)或 $\beta$ 无关的两类。后一类型是最希望的并且应用广泛。

图8-4(a)的通用偏置结构只需一个直流电源( $V_{CC}$ )来建立晶体管的有效模式工作。经由 $ab$ 向左看的戴维南等效导出图8-4(b)的电路。电路中

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad V_{BB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad (8.7)$$

忽略漏电流 [ $I_{BQ} = (\beta + 1)I_{EQ}$ ] 并假定发射极至基极电压  $V_{BEQ}$  是常数(对硅 $\approx 0.7V$ , 对锗 $\approx 0.3V$ ), 于是环绕图8-4(b)发射极回路的KVL得到

$$V_{BB} = \frac{I_{EQ}}{\beta + 1} R_B + V_{BEQ} + I_{EQ} R_E \quad (8.8)$$

此式可用图8-4(c)的发射极回路等效偏置电路来表示。解出式(8.8)的  $I_{BQ}$  并注意到

$$I_{BQ} = \frac{I_{EQ}}{\alpha} \approx I_{EQ}$$

得到

$$I_{CQ} \approx I_{EQ} = \frac{V_{BB} - V_{BEQ}}{\frac{R_B}{\beta + 1} + R_E} \quad (8.9)$$

如果对于一部分而且在最不利的情况下, $\beta$ 值能使

$$\frac{R_B}{\beta + 1} \approx \frac{R_B}{\beta} \ll R_E \quad (8.10)$$

于是无论 $\beta$ 怎样改变, $I_{BQ}$ (从而  $I_{CQ}$ )就是近于恒定的;这个放大器因此具有 $\beta$ 无关的偏置。

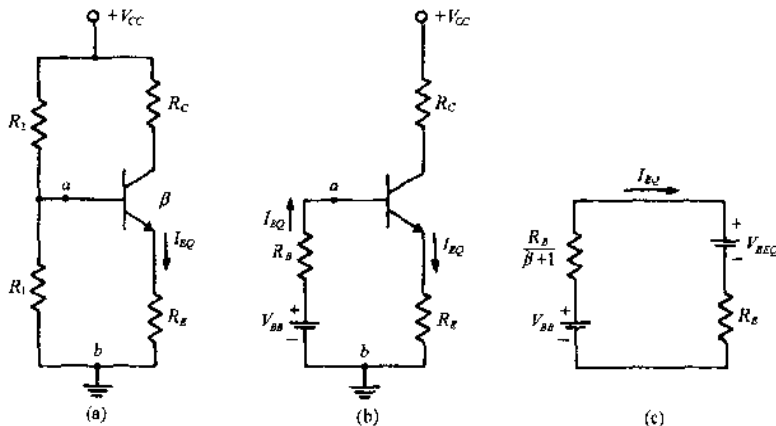


图 8-4

## 8.6 直流负载线和集电极偏置

由图 8-3(c), 显然集电极特性族可以用独立变量  $v_{CE}$  和参量  $i_B$  的数学关系  $i_C = f(v_{CE}, i_B)$  加以表达。设想可以将集电极电路偏置得使  $Q$  点位于有效区中的任何地方。一个典型的设置如图 8-5(a) 所示, 由图

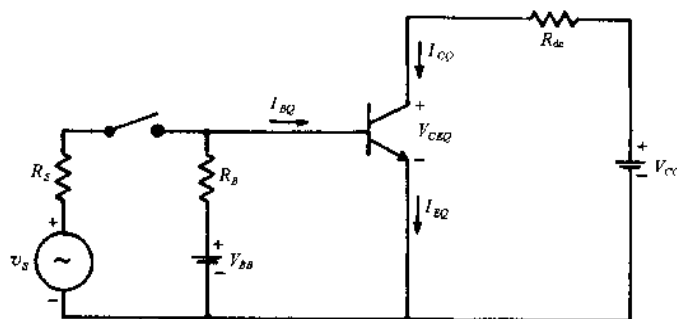
$$I_{CQ} = -\frac{V_{CEQ}}{R_{dc}} + \frac{V_{CC}}{R_{dc}}$$

于是, 如果直流负载线的方程

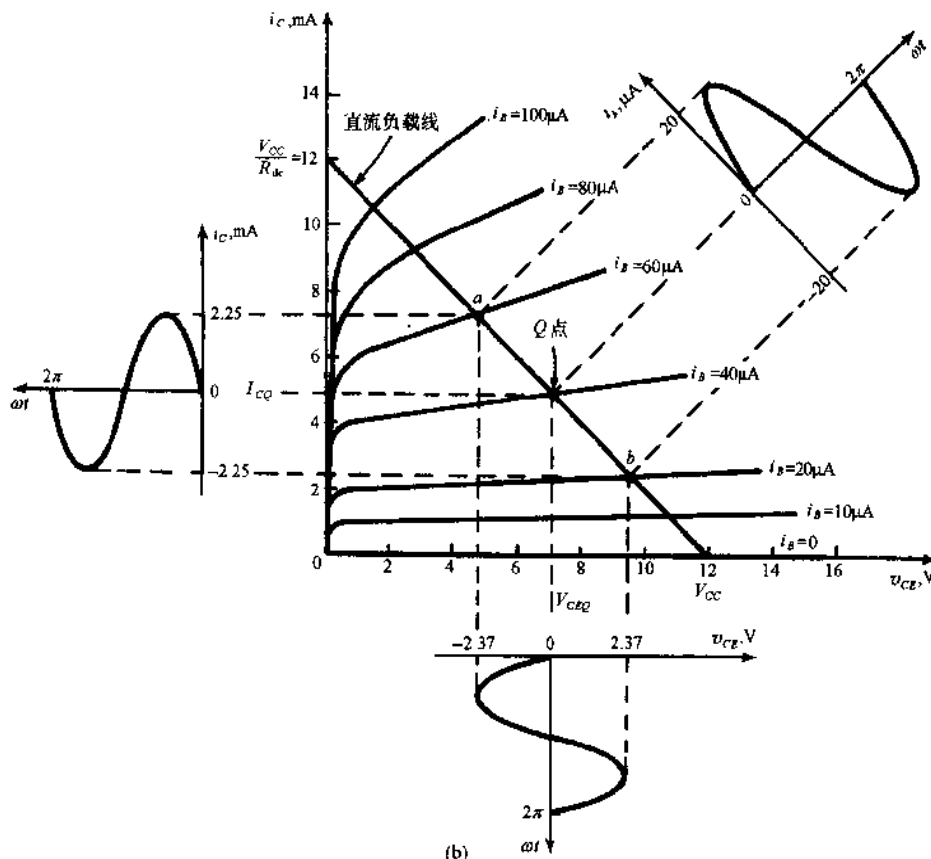
$$i_C = -\frac{v_{CE}}{R_{dc}} + \frac{V_{CC}}{R_{dc}} \quad (8.11)$$

和区分

$$i_B = I_{BQ} \quad (8.12)$$



(a)



(b)

图 8-5

与集电极特性的方程联合在一起, 所得的系统就可以解出(用图解法)集电极静态量  $I_{CQ}$  和  $V_{CEQ}$ 。

**例 8.2** 接通图 8-5(a)的信号源开关而晶体管基极电流成为

$$i_B = I_{BQ} + i_b = 40 + 20\sin\omega t \text{ (}\mu\text{A)}$$

图 8-5(b)示出了晶体管的集电极特性。如果  $V_{CC} = 12\text{V}$ ,  $R_{dc} = 1\text{k}\Omega$ , 用图解法求出 (a)  $I_{CQ}$  和  $V_{CEQ}$ , (b)  $i_c$  和  $v_{ce}$ , (c) 在  $Q$  点的  $h_{FE} (= \beta)$ , (d)  $h_{fe}$ 。

**解** (a) 在图 8-5(b) 上画出直流负载线, 有纵坐标截距  $V_{CC}/R_{dc} = 12\text{mA}$  和横坐标截距  $V_{CC} = 12\text{V}$ 。  $Q$  点是负载线与特性曲线  $i_B = I_{BQ} = 40\mu\text{A}$  的交点。从坐标轴上读出集电极的静态量为  $I_{CQ} = 4.9\text{mA}$  和  $V_{CEQ} = 7.2\text{V}$ 。

(b) 在  $Q$  点处画出一条垂直于负载线的时间标尺, 并绘制了按比例  $i_b = 20\sin\omega t \text{ (}\mu\text{A)}$  略图。随着  $i_b$  沿负载线由  $a$  点至  $b$  点摆动  $\pm 20\mu\text{A}$ , 看出集电极电流和集电极电压有值

$$i_c = 2.25\sin\omega t \text{ (mA)}, \quad v_{ce} = -2.37\sin\omega t \text{ (V)}$$

$v_{ce}$  的负号表明了  $180^\circ$  相位移。

(c) 有  $I_{CQ} = 0$  [在图 8-5(b) 中  $i_B = 0$  曲线标注得与  $v_{ce}$  轴相重合], 由式(8.2),

$$h_{FE} = \frac{I_{CQ}}{I_{BQ}} = \frac{4.9 \times 10^{-3}}{40 \times 10^{-6}} = 122.5$$

(d) 由式(8.6),

$$h_{fe} = \frac{i_c}{i_b} = \frac{I_{cm}}{I_{bm}} = \frac{2.25 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 112.5$$

## 8.7 电容和交流负载线

用图 8-6(a)的电路来举例提出电容(设计得对于信号频率表现为短路)的两个普通用途:

1. 耦合电容( $C_C$ )限制直流量到达晶体管 and 它的偏置电路中。

2. 旁路电容( $C_E$ )在涉及交流信号下有效地消除使增益降低的发射极电阻, 而设置的  $R_E$  在建立  $\beta$  无关偏置(8.5 节)中仍起作用。

图 8-6(a)中电容的短接提供了电路的一种形式, 在交流信号看来就像图 8-6(b)。由图 8-6(a), 以直流偏置电流  $I_{CQ} (\approx I_{BQ})$  看来的集电极电路电阻是  $R_{dc} = R_C + R_E$ 。但是由图 8-6(b), 显然集电极信号电流  $i_c$  看到的集电极电路电阻是  $R_{ac} = R_C R_L / (R_C + R_L)$ 。由于一般  $R_{ac} \neq R_{dc}$ , 产生了交流负载线的概念。将 KVL 应用于图 8-6(b), 外信号电路的  $v-i$  特性由

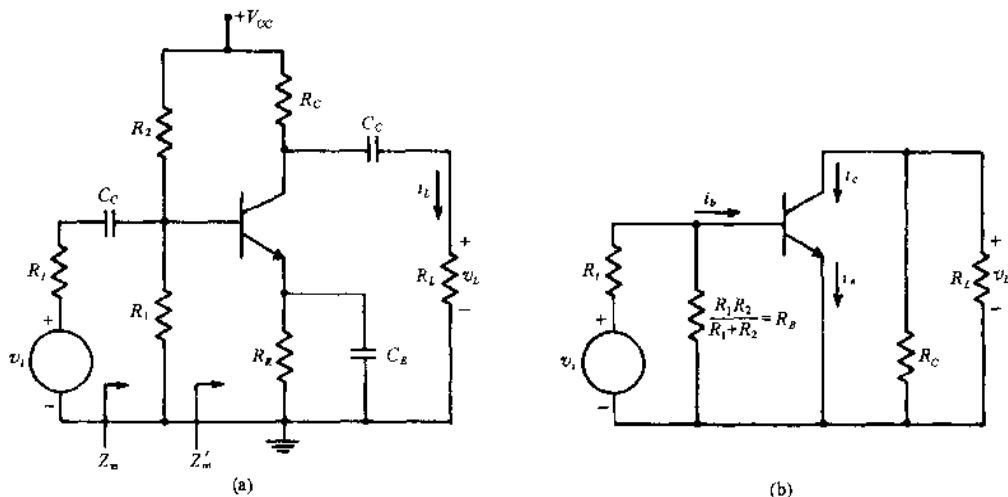


图 8-6 电容耦合和电容旁路放大器

$$v_{ce} = i_c R_{ac} \quad (8.13)$$

给出。由于  $i_c = i_C - I_{CQ}$  和  $v_{ce} = v_{CE} - V_{CEQ}$ , 仿照式(8.11), 可将式(8.13)写为

$$i_C = -\frac{v_{CE}}{R_{ac}} + \left( \frac{V_{CEQ}}{R_{ac}} + I_{CQ} \right) \quad (8.14)$$

交流信号  $i_c$  和  $v_{ce}$  的全部偏移都用交流负载线式(8.14)上的点来表示。如果将  $i_C = I_{CQ}$  的值代入式(8.14), 就得出  $v_{CE} = V_{CEQ}$ ; 交流负载线与直流负载线相交于 Q 点。

### 8.8 放大器分类

由前几节很清楚, 放大器可以偏置得工作在沿直流负载线的任何一点。按照信号高于使放大器工作在线性或有效区期间所占的百分率将放大器进行分类, 见表 8-3。

表 8-3

类别	有效区信号偏移的百分数
A	100
AB	50~100
B	50
C	小于 50

### 8.9 混合参数等效电路

#### CE 晶体管

由图 8-3(b)和(c)看到, 若将  $i_C$  和  $v_{BE}$  作为 CE 晶体管连接时的因变量, 则

$$v_{BE} = f_1(i_B, v_{CE}) \quad (8.15)$$

$$i_C = f_2(i_B, v_{CE}) \quad (8.16)$$

如果发射极至基极总电压  $v_{BE}$  经历了在 Q 点附近的小的偏移(交流信号), 于是  $\Delta v_{BE} = v_{be}$ ,  $\Delta i_C = i_c$ , 等等。因此, 将链式法则分别应用到式(8.15)和式(8.16), 有

$$v_{be} = \Delta v_{BE} \approx dv_{BE} = \left. \frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B} \right|_Q i_b + \left. \frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}} \right|_Q v_{ce} \quad (8.17)$$

$$i_c = \Delta i_C \approx di_C = \left. \frac{\partial i_C}{\partial i_B} \right|_Q i_b + \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \right|_Q v_{ce} \quad (8.18)$$

把出现在式(8.17)和式(8.18)中, 在 Q 点计算的四个偏导数称为混合参数, 表示如下:

$$\text{输入电阻 } h_{ie} \equiv \left. \frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta v_{BE}}{\Delta i_B} \right|_Q \quad (8.19)$$

$$\text{反向电压比 } h_{re} \equiv \left. \frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta v_{BE}}{\Delta v_{CE}} \right|_Q \quad (8.20)$$

$$\text{正向电流增益 } h_{fe} \equiv \left. \frac{\partial i_C}{\partial i_B} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B} \right|_Q \quad (8.21)$$

$$\text{输出导纳 } h_{oe} \equiv \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta v_{CE}} \right|_Q \quad (8.22)$$

图 8-7(a)示出了式(8.17)和式(8.18)的等效电路。当所用的信号在 Q 点附近的偏移足够小, 以致于  $h$  参数可按常数处理时, 这个电路是有效的。

#### CB 晶体管

如果将  $v_{EB}$  和  $i_C$  作为图 8-2(b)中 CB 晶体管特性的因变量, 那么可以用类似于 CE 情形的方式, 求出关于在 Q 点附近小偏移时的方程。结果是

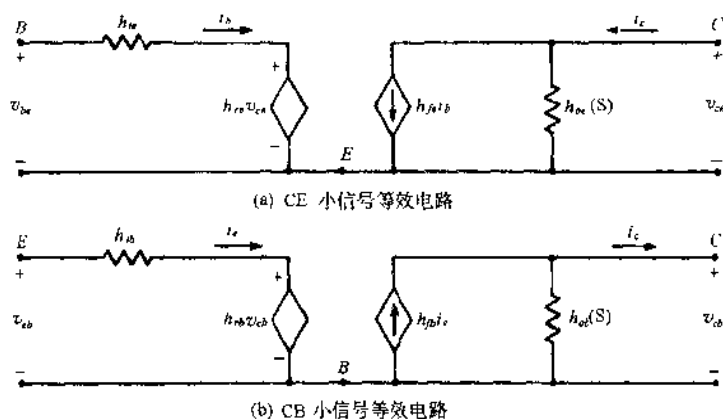


图 8-7

$$v_{cb} = h_{ib}i_e - h_{rb}v_{cb} \quad (8.23)$$

$$i_c = h_{fb}i_e - h_{ob}v_{cb} \quad (8.24)$$

CB 晶体管  $h$  参数的偏导数定义是:

$$\text{输入电阻 } h_{ib} \equiv \left. \frac{\partial v_{EB}}{\partial i_E} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta v_{EB}}{\Delta i_E} \right|_Q \quad (8.25)$$

$$\text{反向电压比 } h_{rb} \equiv \left. \frac{\partial v_{EB}}{\partial v_{CB}} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta v_{EB}}{\Delta v_{CB}} \right|_Q \quad (8.26)$$

$$\text{正向电流增益 } h_{fb} \equiv \left. \frac{\partial i_C}{\partial i_E} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta i_E} \right|_Q \quad (8.27)$$

$$\text{输出导纳 } h_{ob} \equiv - \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{CB}} \right|_Q \approx - \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta v_{CB}} \right|_Q \quad (8.28)$$

图 8-7(b)给出了满足式(8.23)和式(8.24)的 CB 晶体管小信号  $h$  参数等效电路。

### CC 放大器

图 8-8(a)具有通用偏置电路的共集电极(CC)放大器或射极跟随(EF)放大器,对于小信号交流分析,可以用替换了 CE 晶体管的其  $h$  参数模型图 8-7(a)来模拟。为了简单些,假定  $h_{re} = h_{oe} = 0$ ,得到图 8-8(b)的电路

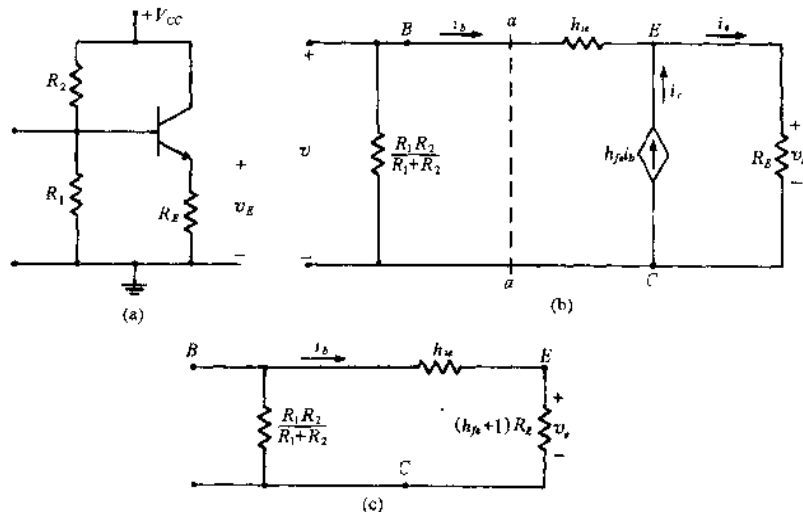


图 8-8 CC 放大器

求出经由图 8-8(b) 中  $aa$  向右看的戴维南等效电路, 可以得到更加简单的模型。环绕外回路 KVL 的应用得出

$$v = i_b h_{re} + {}^{\textcircled{1}} i_e R_E = i_b h_{re} + (h_{fe} + 1) i_b R_E \quad (8.29)$$

戴维南阻抗就是这个激励点阻抗,

$$R_{Th} = \frac{v}{i_b} = h_{re} + (h_{fe} + 1) R_E \quad (8.30)$$

按  $aa$  端开路, 戴维南电压为零; 于是等效电路仅包含  $R_{Th}$ 。图 8-8(c) 以基极电流观点的电路表示了这些。

### 8.10 放大器的功率和效率

放大器的效率是信号输出功率平均值( $P_O$ )与偏置电源供出功率( $P_S$ )的百分比:

$$\eta = \frac{P_O}{P_S} \times 100\% \quad (8.31)$$

如果不存在信号, 放大器就有零效率, 在最大的信号偏移时效率就是最大值。

在晶体管集电极中消耗的平均功率( $P_C$ )是器件热额定的根据; 很容易求出它为

$$P_C = P_S - (\text{各 } I^2 R \text{ 损耗}) - P_O \quad (8.32)$$

### 例题解答

- 8.1 当锗晶体管(硅晶体管)的温度每增加  $10^\circ\text{C}$  (增加  $6^\circ\text{C}$ ) 时漏电流近似加倍。如果一个硅晶体管在  $25^\circ\text{C}$  时具有  $I_{CBO} = 500\text{nA}$ , 试求在  $90^\circ\text{C}$  时它的漏电流。

$$I_{CBO} = (500 \times 10^{-9}) 2^{(90-25)/6} = (500 \times 10^{-9}) (1824.56) = 912.28 \mu\text{A}$$

- 8.2 一个  $\beta = 100$  的锗晶体管有  $5\mu\text{A}$  的基极至集电极漏电流( $I_{CBO}$ )。如果将这个晶体管连接为共发射极工作, 当(a)  $I_B = 0$  时, (b)  $I_B = 40\mu\text{A}$  时, 求集电极电流。

(a) 当  $I_B = 0$  时, 仅流过发射极至集电极漏电流, 由(8.3),

$$I_{CBO} = (\beta + 1) I_{CBO} = (100 + 1) (5 \times 10^{-6}) = 505 \mu\text{A}$$

(b) 将式(8.3)代入式(8.2)并求解  $I_C$ :

$$I_C = \beta I_B + (\beta + 1) I_{CBO} = (100) (40 \times 10^{-6}) + (101) (5 \times 10^{-6}) = 4.505 \text{mA}$$

- 8.3 画出在两个不同温度下的共发射极输出特性曲线族, 所表示的这个曲线族处于较高的温度。

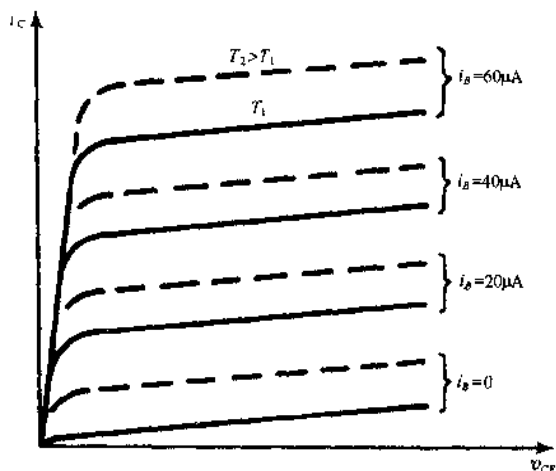


图 8-9

① 原著中为等号。~ 一译者注

由图 8-3(a) 中的电流表和电压表读出为点  $(I_C, V_{CE})$  的集合, 得到 CE 集电极特性图 8-3(c)。由于  $I_{CBO}$  要随温度而增加(题 8.1),  $\beta$  是相当温度不敏感的, 而  $I_C = \beta I_B + (\beta + 1)I_{CBO}$ 。现在, 对每一个一定的  $I_B$  值,  $I_C$  必须随温度而增加。在图 8-9 中表示了集电极特性总的移动结果。

- 8.4 图 8-10 的晶体管具有  $\alpha = 0.98$  和  $30\mu A$  的基极电流, 试求 (a)  $\beta$ , (b)  $I_{CQ}$ , (c)  $I_{BQ}$ 。假定漏电流是可忽略的。

(a) 
$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{0.98}{1 - 0.98} = 49$$

(b) 当  $I_{CBO} = 0$ , 由 (8.2),  $I_{CQ} = \beta I_{BQ} = (49)(30 \times 10^{-6}) = 1.47mA$ 。

(c) 当  $I_{CBO} = 0$ , 由 (8.1),  $I_{BQ} = \frac{I_{CQ}}{\alpha} = \frac{1.47}{0.98} = 1.50mA$ 。

- 8.5 欲使图 8-10 的晶体管电路工作于  $40\mu A$  基极电流且  $V_{BB} = 6V$ , 硅晶体管 ( $V_{BEQ} = 0.7V$ ) 具有可忽略的漏电流。试求  $R_B$  的值。

由环绕基极发射极回路的 KVL,

$$V_{BB} = I_{BQ}R_B + V_{BEQ} \text{ 或 } R_B = \frac{V_{BB} - V_{BEQ}}{I_{BQ}} = \frac{6 - 0.7}{40 \times 10^{-5}} = 132.5k\Omega$$

- 8.6 关于图 8-10 的电路,  $\beta = 100$ ,  $I_{BQ} = 20\mu A$ ,  $V_{CC} = 15V$ ,  $R_C = 3k\Omega$ 。如果  $I_{CBO} = 0$ , 求 (a)  $I_{CQ}$ , (b)  $V_{CEQ}$ 。(c) 若将  $R_C$  改为  $6k\Omega$  而其他全保持原样, 求  $V_{CEQ}$ 。

(a) 
$$\alpha = \frac{\beta}{\beta + 1} = \frac{100}{101} = 0.9901$$

当  $I_{CBO} = I_{CBO} = 0$  时利用 (8.1) 和 (8.2),

$$I_{CQ} = \beta I_{BQ} = 100 \times 20 \times 10^{-6} = 2mA$$

$$I_{BQ} = \frac{I_{CQ}}{\alpha} = \frac{2 \times 10^{-3}}{0.9901} = 2.02mA$$

(b) 由环绕集电极电路 KVL 的应用,

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{CQ}R_C = 15 - 2 \times 3 = 9V$$

(c) 如果不改变  $I_{BQ}$ , 则  $I_{CQ}$  也不改变。求解过程同 (b)。

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{CQ}R_C = 15 - (2)(6) = 3V$$

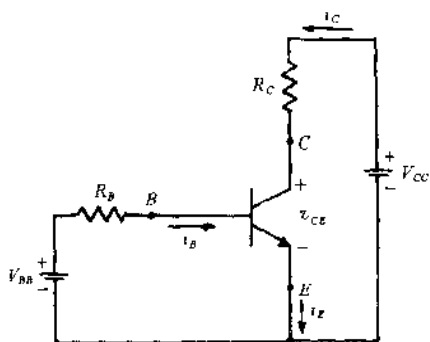


图 8-10

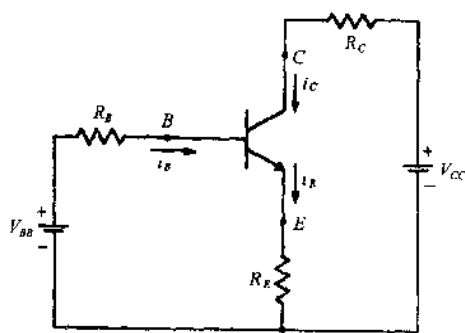


图 8-11

- 8.7 图 8-11 的晶体管是具有  $40\mu A$  基极电流和  $I_{CBO} = 0$  的硅器件。若  $V_{BB} = 6V$ ,  $R_E = 1k\Omega$ ,  $\beta = 80$ , 试求 (a)  $I_{BQ}$ , (b)  $R_B$ 。(c) 如果  $V_{CC} = 15V$ ,  $R_C = 3k\Omega$ , 求  $V_{CEQ}$ 。

(a) 
$$\alpha = \frac{\beta}{\beta + 1} = \frac{80}{81} = 0.9876$$

当  $I_{CBO} = I_{CBO} = 0$  时式 (8.1) 和式 (8.2) 联合给出

$$I_{BQ} = \frac{I_{BQ}}{1 - \alpha} = \frac{40 \times 10^{-6}}{1 - 0.9876} = 3.226mA$$

(b) 环绕基极发射极回路应用 KVL 得出

$$V_{BB} = I_{BQ}R_B + V_{BEQ} + I_{BQ}R_E$$

或

$$R_B = \frac{V_{BB} - V_{BEQ} - I_{BQ}R_E}{I_{BQ}} = \frac{6 - 0.7 - 3.226 \times 1}{40 \times 10^{-6}} = 51.85k\Omega$$



(c) 当  $I_{CEQ} = 0$ , 由式(8.2),

$$I_{CQ} - \beta I_{BQ} = 80 \times (40 \times 10^{-6}) = 3.2 \text{mA}$$

由环绕集电极电路的 KVL,

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{BQ}R_E - I_{CQ}R_C = 15 - 3.24 \times 1 - 3.2 \times 3 = 2.16 \text{V}$$

8.8 将图 8-5(b) 的 CE 集电极特性应用于图 8-10 的晶体管。若  $I_{BQ} = 30 \mu\text{A}$ ,  $V_{CEQ} = 8 \text{V}$ ,  $V_{CC} = 14 \text{V}$ , 试用图解法求 (a)  $I_{CQ}$ , (b)  $R_C$ , (c)  $I_{EQ}$ 。 (d) 如果漏电流是可忽略的, 求  $\beta$ 。

解 (a) Q 点是  $i_B = I_{BQ} = 30 \mu\text{A}$  与  $v_{CE} = V_{CEQ} = 8 \text{V}$  的交点。直流负载线必须通过 Q 点并且交  $v_{CE}$  轴于  $V_{CC} = 14 \text{V}$ 。在图 8-5(b) 中绘出直流负载线并且按 Q 点的  $i_C$  坐标读出  $I_{CQ} = 2.7 \text{mA}$ 。

(b) 直流负载线的  $i_C$  截距是  $V_{CC}/R_C = V_{CC}/R_C$ , 由图 8-5(b), 此式有值  $6.25 \text{mA}$ ; 因此,

$$R_C = \frac{V_{CC}}{6.25 \times 10^{-3}} = \frac{14}{6.25 \times 10^{-3}} = 2.24 \text{k}\Omega$$

(c) 由式(8.4),  $I_{BQ} = I_{CQ} + I_{EQ} = (2.7 \times 10^{-3}) + (30 \times 10^{-6}) = 2.73 \text{mA}$ 。

(d) 当  $I_{CEQ} = 0$ , 式(8.2)得出

$$\beta = \frac{I_{CQ}}{I_{BQ}} = \frac{2.7 \times 10^{-3}}{30 \times 10^{-6}} = 90$$

8.9 图 8-12 的硅晶体管被偏置为恒定的基极电流 ( $\beta$  相关方法)。如果  $\beta = 80$ ,  $V_{CEQ} = 8 \text{V}$ ,  $R_C = 3 \text{k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 15 \text{V}$ , 求 (a)  $I_{CQ}$ , (b)  $R_B$  的值。 (c) 若这个晶体管是锗器件, 求  $R_B$ 。

解 (a) 由环绕集电极电路的 KVL,

$$I_{CQ} = \frac{V_{CC} - V_{CEQ}}{R_C} = \frac{15 - 8}{3 \times 10^3} = 2.333 \text{mA}$$

(b) 如果忽略漏电流, 式(8.2)给出

$$I_{BQ} = \frac{I_{CQ}}{\beta} = \frac{2.333 \times 10^{-3}}{80} = 29.16 \mu\text{A}$$

由于这个晶体管是硅的,  $V_{BEQ} = 0.7 \text{V}$ , 由环绕外回路的 KVL,

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_{BEQ}}{I_{BQ}} = \frac{15 - 0.7}{29.16 \times 10^{-6}} = 490.4 \text{k}\Omega$$

(c) 与上面解答的区别仅是现在  $V_{BEQ} = 0.3 \text{V}$ ; 于是

$$R_B = \frac{15 - 0.3}{29.16 \times 10^{-6}} = 504.1 \text{k}\Omega$$

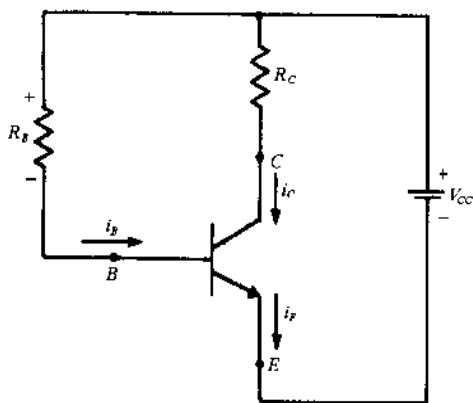


图 8-12

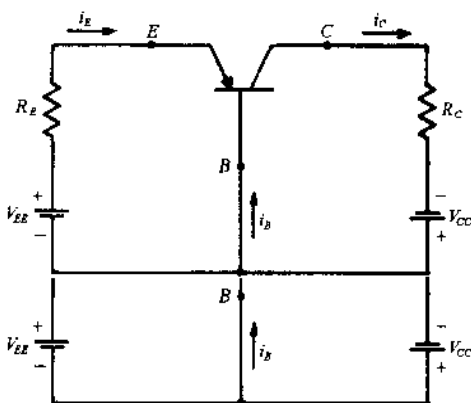


图 8-13

8.10 图 8-13 的硅晶体管具有  $\alpha = 0.99$  和  $I_{CEQ} = 0$ , 还有  $V_{BE} = 4 \text{V}$  和  $V_{CC} = 12 \text{V}$ 。 (a) 如果  $I_{BQ} = 1.1 \text{mA}$ , 求  $R_E$ 。 (b) 如果  $V_{CEQ} = -7 \text{V}$ , 求  $R_C$ 。

解 (a) 由环绕发射极基极回路的 KVL,

$$R_E = \frac{V_{BE} + V_{BEQ}}{I_{BQ}} = \frac{4 + (-0.7)}{1.1 \times 10^{-3}} = 3 \text{k}\Omega$$

(b) 由环绕晶体管端极的 KVL,

$$V_{CEQ} = V_{CEQ} - V_{BEQ} = -7 - (-0.7) = -6.3 \text{V}$$

当为可忽略的漏电流时,式(8.1)给出

$$I_{CQ} = \alpha I_{EQ} = (0.99)(1.1 \times 10^{-3}) = 1.089 \text{ mA}$$

由环绕基极集电极回路的 KVL,

$$R_C = \frac{V_{CC} + V_{CEQ}}{I_{CQ}} = \frac{12 - 6.3}{1.089 \times 10^{-3}} = 5.234 \text{ k}\Omega$$

- 8.11 关于图 8-4(a)的电路为硅晶体管,  $R_C = 300 \Omega$ ,  $R_E = 200 \Omega$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 15 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ ,  $\beta = 110$ 。假定  $I_{CQ} \approx I_{EQ}$  和  $V_{CEQ} \approx 0$ 。(a)如果注入交流的基极电流;(b)如果将  $V_{CC}$  改成  $10 \text{ V}$  而其余全保持原样,求集电极电流的最大对称摆幅。

解 (a)利用式(8.7)和(8.9),

$$R_B = \frac{(2 \times 10^3)(15 \times 10^3)}{17 \times 10^3} = 1.765 \text{ k}\Omega$$

$$V_{BB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC} = \frac{2 \times 10^3}{17 \times 10^3} (15) = 1.765 \text{ V}$$

$$I_{CQ} \approx I_{EQ} = \frac{V_{BB} - V_{BEQ}}{\frac{R_B}{\beta + 1} + R_E} = \frac{1.765 - 0.7}{(1765/111) + 200} = 4.93 \text{ mA}$$

由环绕集电极电路的 KVL,并用  $I_{CQ} \approx I_{EQ}$ ,有

$$\begin{aligned} V_{CEQ} &= V_{CC} - I_{CQ}(R_C + R_E) \\ &= 15 - (4.93 \times 10^{-3}) \times (200 + 300) = 12.535 \text{ V} \end{aligned}$$

由于  $V_{CEQ} > V_{CC}/2 = 7.5 \text{ V}$ ,截止在饱和之前出现,  $i_c$  能够相对  $I_{CQ}$  摆动  $\pm 4.93 \text{ mA}$  并保持在有效区内。

$$(b) \quad V_{BB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC} = \frac{2 \times 10^3}{17 \times 10^3} (10) = 1.1765 \text{ V}$$

$$I_{CQ} \approx I_{EQ} = \frac{V_{BB} - V_{BEQ}}{\frac{R_B}{\beta + 1} + R_E} = \frac{1.1765 - 0.7}{(1765/111) + 200} = 2.206 \text{ mA}$$

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{CQ}(R_C + R_E) = 10 - (2.206 \times 10^{-3}) \times (0.5) = 8.79 \text{ V}$$

由于  $V_{CEQ} > V_{CC}/2 = 5 \text{ V}$ ,截止首先出现,  $i_c$  能够相对  $I_{CQ}$  摆动  $\pm 2.206 \text{ mA}$  并保持在工作的有效区内。这里,电源电压 33.3% 的减少引起集电极电流对称摆幅 50% 以上的减少。

- 8.12 如果将硅晶体管从图 8-4(a)的电路中去掉并代以相同  $\beta$  的锗晶体管,问 Q 点将朝饱和的方向还是朝截止的方向移动?

解 由于  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $V_{CC}$  不变,  $R_B$  和  $V_{BB}$  也将保持不变。然而,因为对硅(0.7V)与对锗(0.3V)不同的发射极至基极正向压降,

$$I_{CQ} \approx \frac{V_{BB} - V_{BEQ}}{\frac{R_B}{\beta + 1} + R_E}$$

在锗晶体管的接入之下将会增加。于是, Q 点将朝饱和的方向移动。

- 8.13 图 8-14 的电路利用了电流反馈偏置。硅晶体管具有  $I_{CEO} \approx 0$ ,  $V_{CEQ} \approx 0$ ,  $h_{FE} = 100$ 。如果  $R_C = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 12 \text{ V}$ ,试设定  $R_F$  以达到最大的对称摆幅( $V_{CEQ} = V_{CC}/2$ )。

解 对集电极电路 KVL 的应用得出

$$(I_{BQ} + I_{CQ})R_C = V_{CC} - V_{CEQ} \quad (1)$$

但是  $I_{CQ} = h_{FE} I_{BQ}$ , 将其代入(1)中导出

$$\begin{aligned} I_{BQ} &= \frac{V_{CC} - V_{CEQ}}{(h_{FE} + 1)R_C} \\ &= \frac{12 - 6}{(100 + 1) \times (2 \times 10^3)} = 29.7 \mu\text{A} \end{aligned}$$

用环绕晶体管端极的 KVL,

$$R_F = \frac{V_{CEQ} - V_{BEQ}}{I_{BQ}}$$

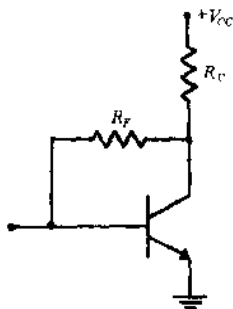


图 8-14

$$= \frac{6 - 0.7}{29.7 \times 10^{-6}} = 178.5 \text{ k}\Omega$$

- 8.14 在图 8-15 中给出了图 8-13 中锗晶体管的集电极特性。如果  $V_{EE} = 2\text{V}$ ,  $V_{CC} = 12\text{V}$ ,  $R_C = 2\text{k}\Omega$ , 试设定使  $V_{CEQ} \approx 6.4\text{V}$  的  $R_E$ 。

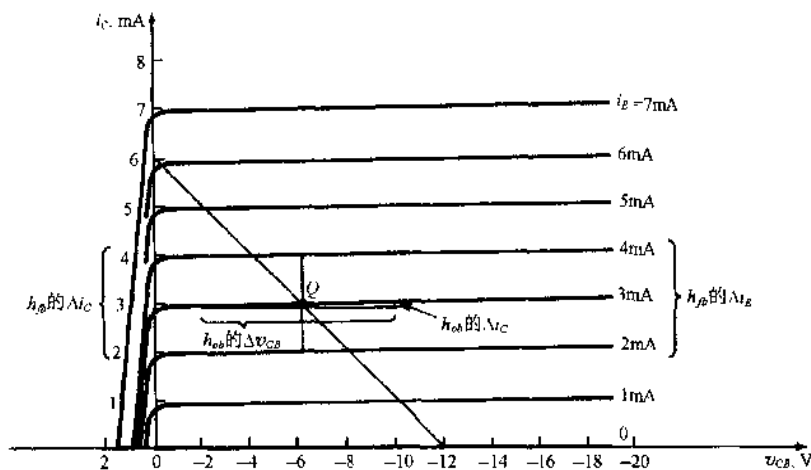


图 8-15

在图 8-15 上绘出具有  $v_{CE}$  截距  $-V_{CC} = -12\text{V}$  和  $i_C$  截距  $V_{CC}/R_C = 6\text{mA}$  的直流负载线。环绕晶体管端极的 KVL 给出 Q 点的横坐标:

$$V_{CEQ} = V_{CC} - V_{BEQ} = -6.4 - (-0.3) = -6.1\text{V}$$

确定了 Q 点, 由图上读出  $I_{BQ} = 3\text{mA}$ 。环绕发射极基极回路导出

$$R_E = \frac{V_{EE} + V_{BEQ}}{I_{BQ}} = \frac{2 + (-0.3)}{3 \times 10^{-3}} = 566.7 \Omega$$

- 8.15 关于图 8-11 的电路,  $I_{BQ} = 30\mu\text{A}$ ,  $R_E = 1\text{k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 15\text{V}$ ,  $\beta = 80$ 。如果  $V_{CE\text{饱和}} = 0.2\text{V}$ ,  $\beta$  为常数, 漏电流是可忽略的, 试求使晶体管静态点保持在饱和区时  $R_C$  的最小值。

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta + 1} = \frac{80}{81} = 0.9876$$

当漏电流是可忽略的, 用式(8.1)和(8.2)得到

$$I_{CQ} = \beta I_{BQ} = (80)(30 \times 10^{-6}) = 2.4\text{mA},$$

$$I_{BQ} = \frac{I_{CQ}}{\alpha} = \frac{2.4 \times 10^{-3}}{0.9876} = 2.43\text{mA}$$

环绕集电极电路的 KVL 导出保证饱和的  $R_C$  最小值。

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE\text{饱和}} - I_{BQ}R_E}{I_{CQ}} = \frac{15 - 0.2 - (2.43)(1)}{2.4 \times 10^{-3}} = 5.154\text{k}\Omega$$

- 8.16 关于图 8-4(a)的电路,  $R_E = 300\Omega$ ,  $R_C = 500\Omega$ ,  $V_{CC} = 15\text{V}$ ,  $\beta = 100$ 。硅晶体管是  $\beta$  无关偏置的。如果  $V_{CE\text{饱和}} \approx 0$ , 试设定为了最大对称摆幅的  $R_1$  和  $R_2$ 。

用一般因数 10 确立(8.10)不等式的界限,

$$R_B = \frac{\beta R_E}{10} = \frac{100 \times 300}{10} = 3\text{k}\Omega \quad (1)$$

为了最大的对称摆幅, 集电极静态电流为

$$I_{CQ} = \frac{1}{2} \left( \frac{V_{CC}}{R_E + R_C} \right) = \frac{15}{2(300 + 500)} = 9.375\text{mA}$$

由式(8.9)和(1)

$$V_{BE} \approx V_{BEQ} + I_{CQ}(1.1R_E) = 0.7 + (9.375 \times 10^{-3} \times 330) = 3.794\text{V}$$

现在可以联立求解方程(8.7)给出

$$R_1 = \frac{R_B}{1 - (V_{BE}/V_{CC})} = \frac{3 \times 10^3}{1 - (3.794/15)} = 4.02\text{k}\Omega$$

$$R_1 = R_B \frac{V_{CC}}{V_{BB}} = (3 \times 10^3) \left( \frac{15}{3.794} \right) = 11.86 \text{ k}\Omega$$

- 8.17 关于图 8-6(a) 具有硅晶体管的电路,  $R_E = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 10R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L = R_C = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $\beta \approx 100$ ,  $V_{CC} = 15 \text{ V}$ 。假定  $C_C$  和  $C_E$  近似为  $\infty$ ,  $V_{CEQ} \approx 0$ , 截止时  $i_C = 0$ 。试求 (a)  $I_{CQ}$ , (b)  $V_{CEQ}$ , (c) 交流负载线的斜率, (d) 直流负载线的斜率, (e) 无失真  $i_L$  的峰值。

解 (a) 利用式 (8.7) 和式 (8.9),

$$R_B = \frac{(1 \times 10^3)(10 \times 10^3)}{11 \times 10^3} = 909 \Omega, \quad V_{BB} = \frac{1 \times 10^3}{11 \times 10^3} (15) = 1.364 \text{ V}$$

$$I_{CQ} \approx \frac{V_{BB} - V_{BEQ}}{[R_B / (\beta + 1)] + R_E} = \frac{1.364 - 0.7}{(909/101) + 200} = 3.177 \text{ mA}$$

(b) 当  $I_{CQ} \approx I_{EQ}$ , 环绕集电极电路的 KVL 给出

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{CQ}(R_E + R_C) = 15 - (3.177 \times 10^{-3})(2.2 \times 10^3) = 8.01 \text{ V}$$

$$(c) \quad \text{斜率} = \frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_L} = 2 \left( \frac{1}{2 \times 10^3} \right) = 1 \text{ mS}$$

$$(d) \quad \text{斜率} = \frac{1}{R_{dc}} = \frac{1}{R_C + R_E} = \frac{1}{2.2 \times 10^3} = 0.454 \text{ mS}$$

(e) 交流负载线截  $v_{CE}$  轴于

$$v_{CEmax} = V_{CEQ} + I_{CQ}R_{ac} = 8.01 + (3.177 \times 10^{-3})(1 \times 10^3) = 11.187 \text{ V}$$

由于  $v_{CEmax} < 2V_{CEQ}$ , 截止首先出现。而大电容表现为交流短路,

$$i_L = \frac{v_L}{R_L} = \frac{v_{ce}}{R_L}$$

或以峰值形式表示为

$$I_{Lm} = \frac{V_{cem}}{R_L} = \frac{v_{CEmax} - V_{CEQ}}{R_L} = \frac{11.187 - 8.01}{2 \times 10^3} = 1.588 \text{ mA}$$

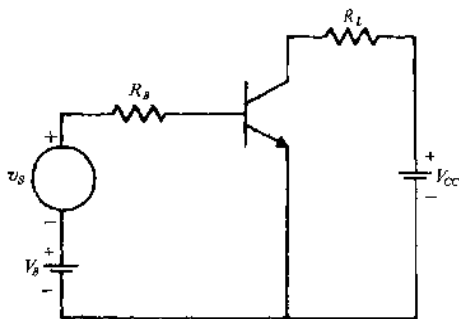


图 8-16

- 8.18 图 8-16 的放大器用了一个硅晶体管, 它的  $V_{BEQ} = 0.7 \text{ V}$ 。假定集电极电路不产生限制, 如果 (a)  $V_B = 1.0 \text{ V}$ ,  $v_s = 0.25 \cos \omega t \text{ (V)}$ ; (b)  $V_B = 1.0 \text{ V}$ ,  $v_s = 0.5 \cos \omega t \text{ (V)}$ ; (c)  $V_B = 0.5 \text{ V}$ ,  $v_s = 0.6 \cos \omega t \text{ (V)}$ ; (d)  $V_B = 0.7 \text{ V}$ ,  $v_s = 0.5 \cos \omega t \text{ (V)}$ , 试按偏置将此放大器分类 (A、B、AB 或 C 类)。

解 只要  $v_s + V_B > 0.7 \text{ V}$ , 发射极基极结就是正向偏置的; 于是分类就成为只是来确定  $v_s$  高于使这个不等式成立期间所占部分的一个问题。

- (a)  $v_s + V_B \geq 0.75 \text{ V}$ ; 于是晶体管一直处于有效区中, 放大器是 A 类的。  
 (b)  $0.5 \text{ V} \leq v_s + V_B \leq 1.5 \text{ V}$ ; 于是当  $v_s$  负偏移的一部分时晶体管是截止的。由于截止是相当于比  $180^\circ$  小, 工作是 AB 类的。  
 (c)  $-0.1 \text{ V} \leq v_s + V_B \leq 1.1 \text{ V}$ , 此式给出  $v_s$  小于  $180^\circ$  的导通, 是 C 类工作。  
 (d)  $v_s$  准确地  $180^\circ$  高于  $v_s + V_B \geq 0.7 \text{ V}$ , 即为 B 类工作。

- 8.19 请回答下面关于 CE 连接晶体管的问题。 (a) 如果  $v_{CE}$  产生的负反馈是可忽略的, 对输入特性 ( $i_B$  与  $v_{BE}$  的关系曲线) 的影响怎样? (b) 小的或边界上的发射极基极偏置的可能效果是什么? (c) 如果晶体管有无限大的输出阻抗, 输出特性的特征是什么? (d) 参看图 8-5(b), 若工作模式由有效区趋向饱和区, 晶体管的电流增益是加大还是减小?

解 (a) 输入特性曲线族简并成一条单一曲线——频繁接近。

(b) 如果  $I_{BQ}$  小到使工作发生在输入特性曲线的弯曲处附近, 就引起失真。

(c) 在有效区中输出特性曲线的斜率为零。

(d) 当为一定的  $\Delta i_B$  时,  $\Delta i_C$  减小; 因此电流增益减小。

- 8.20 已知  $R_C = R_L = 800\Omega$ ,  $R_i = 0$ ,  $R_1 = 1.2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 2.7\text{k}\Omega$ ,  $h_{re} \approx 0$ ,  $h_{oe} = 100\mu\text{S}$ ,  $h_{fe} = 90$ ,  $h_{ie} = 200\Omega$ , 试用小信号  $h$  参数等效电路分析图 8-6(a) 的放大器。计算 (a) 电压增益 ( $A_v$ ), (b) 电流增益 ( $A_i$ )。

在图 8-17 中示出了小信号电路, 其中

$$R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 831\Omega$$

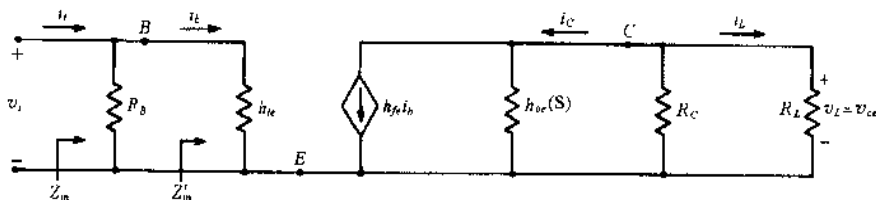


图 8-17

(a) 应用电流分配法则(1.13)至集电极电路,

$$-i_L = \frac{R_C(1/h_{oe})}{R_C(1/h_{oe}) + R_L(1/h_{oe}) + R_L R_C} (h_{fe} i_b)$$

电压增益则为

$$\begin{aligned} A_v \equiv \frac{v_L}{v_i} &= \frac{R_L i_L}{h_{ie} i_b} = - \frac{h_{fe} R_L R_C}{h_{ie} (R_C + R_L + h_{oe} R_L R_C)} \\ &= - \frac{(90)(800)^2}{200[1600 + (100 \times 10^{-6})(800)^2]} = -173.08 \end{aligned}$$

(b) 用电流分配,

$$i_b = \frac{R_B}{R_B + h_{ie}} i_i$$

这样

$$\begin{aligned} A_i \equiv \frac{i_L}{i_i} &= \frac{R_B}{R_B + h_{ie}} \frac{i_L}{i_b} = \frac{R_B h_{fe}}{R_L (R_B + h_{ie})} A_v \\ &= \frac{(831)(200)(-173.08)}{(800)(1031)} = -34.87 \end{aligned}$$

- 8.21 如果以一个正向偏置的二极管模拟晶体管的发射极基极结, 试以发射极电流的形式表示  $h_{re}$ 。

在式(7.1)中用晶体管符号得

$$i_B = I_{CBO} (e^{qV_{BE}/V_T} - 1) \quad (1)$$

然后, 用式(8.19)

$$\frac{1}{h_{re}} = \left. \frac{\partial i_B}{\partial v_{BE}} \right|_Q = \frac{1}{V_T} I_{CBO} e^{V_{BEQ}/V_T} \quad (2)$$

但是用(1)和题 7.1,

$$I_{BQ} = I_{CBO} (e^{V_{BEQ}/V_T} - 1) \approx I_{CBO} e^{V_{BEQ}/V_T} \quad (3)$$

并且

$$I_{BQ} = \frac{I_{BQ}}{\beta + 1} \quad (4)$$

方程(2), (3), (4)意味着

$$h_{re} = \frac{V_T(\beta + 1)}{I_{BQ}}$$

- 8.22 对于题 8.14 的 CB 放大器, 以图解法求出 (a)  $h_{re}$ , (b)  $h_{oe}$ 。

在图 8-15 上显示了题 8.14 中确立的 Q 点。

(a) 用式(8.27),

$$h_{re} \approx \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta i_E} \right|_{V_{CEQ} = -6.1V} = \frac{(3.97 - 2.0) \times 10^{-3}}{(4 - 2) \times 10^{-3}} = 0.985$$

(b) 用式(8.28),

$$h_{ie} \approx - \left. \frac{\Delta i_c}{\Delta v_{be}} \right|_{i_{BQ} = 3\text{mA}} = - \frac{(3.05 - 2.95) \times 10^{-3}}{-10 - (-2)} = 12.5 \mu\text{S}$$

8.23 求出以  $h$  参数形式表示的图 8-6(a) 电路的输入阻抗  $Z_{in}$ ,  $h$  参数全为非零的。

**解** 如果像图 8-7(a) 那样将相关电源  $h_{re}v_{ce}$  加入, 具有  $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$  的图 8-17 小信号电路就是可应用的。集电极电路的导纳由

$$G = h_{oe} + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_C}$$

给出, 并用欧姆定律,

$$v_{ce} = \frac{-h_{fe} i_b}{G} \quad (1)$$

将 KVL 应用至输入电路,

$$i_b = \frac{v_i - h_{re} v_{ce}}{h_{ie}} \quad (2)$$

在(1)与(2)之间消去  $v_{ce}$  获得

$$Z_{in}' \equiv \frac{v_i}{i_b} = h_{ie} - \frac{h_{re} h_{fe}}{G} \quad (3)$$

于是,

$$Z_{in} = \frac{R_B Z_{in}'}{R_B + Z_{in}'} = \frac{R_B [h_{ie} - (h_{re} h_{fe} / G)]}{R_B + h_{ie} - (h_{re} h_{fe} / G)} \quad (4)$$

8.24 在图 8-18 的两级放大器中两个晶体管是相同的, 有  $h_{ie} = 1500 \Omega$ ,  $h_{fe} = 40$ ,  $h_{re} \approx 0$ ,  $h_{oe} = 30 \mu\text{S}$ 。还有  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_{C2} = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_{C1} = 10\text{k}\Omega$ ,

$$R_{B1} \equiv \frac{R_{11} R_{12}}{R_{11} + R_{12}} = 5\text{k}\Omega, \quad R_{B2} \equiv \frac{R_{21} R_{22}}{R_{21} + R_{22}} = 5\text{k}\Omega$$

试求(a)末级电压增益  $A_{v2} \equiv v_o / v_{o1}$ ; (b)末级输入阻抗  $Z_{in2}$ ; (c)初级电压增益  $A_{v1} \equiv v_{o1} / v_{in}$ ; (d)放大器输入阻抗  $Z_{in}$ ; (e)放大器电压增益  $A_v \equiv v_o / v_i$ 。

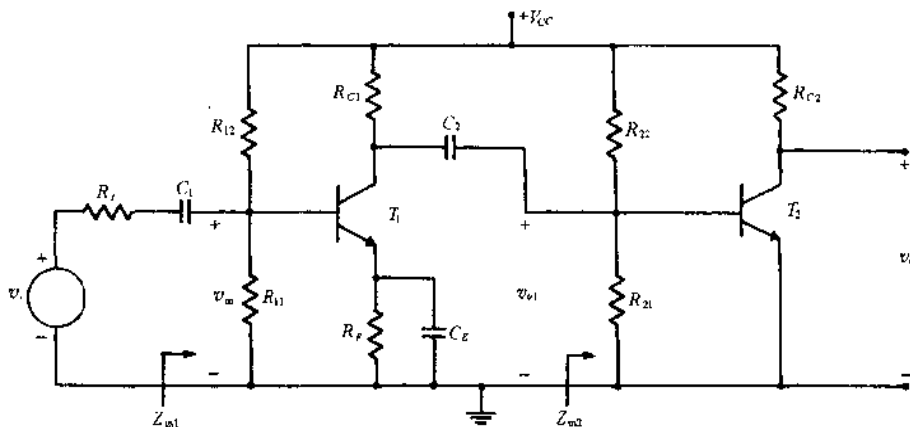


图 8-18

**解** (a) 如果用  $R_{C2}$  替换  $R_L$  与  $R_C$  的并联组合, 用题 8.20(a) 的结果就给出末级电压增益。

$$A_{v2} = - \frac{h_{fe} R_{C2}}{h_{ie} (1 + h_{oe} R_{C2})} = - \frac{(40)(20 \times 10^3)}{(1500)[1 + (30 \times 10^{-6})(20 \times 10^3)]} = -333.3$$

(b) 当  $h_{re} \approx 0$  时, 由题 8.23 的(4),

$$Z_{in2} = \frac{R_{B2} h_{ie}}{R_{B2} + h_{ie}} = \frac{(5 \times 10^3)(1500)}{(5 \times 10^3) + 1500} = 1.154\text{k}\Omega$$

(c) 如果用  $R_{C1}$  和  $Z_{in2}$  分别替换  $R_C$  和  $R_L$ , 用题 8.20(a) 的结果就给出初级电压增益。

$$\begin{aligned} A_{v1} &= - \frac{h_{fe} Z_{in2} R_{C1}}{h_{ie} (R_{C1} + Z_{in2} + h_{oe} Z_{in2} R_{C1})} \\ &= - \frac{(40)(1154)(10^4)}{(1500)(10^4 + 1154 + 346.2)} = -26.8 \end{aligned}$$

(d)像(b)中一样,

$$Z_{in} = \frac{R_{B1} h_{re}}{R_{B1} + h_{re}} = 1.154 \text{ k}\Omega$$

(e)用电压分配,

$$\frac{v_{in}}{v_i} = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_i} = \frac{1154}{1154 + 1000} = 0.5357$$

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_i} = \frac{v_o}{v_i} A_{v1} A_{v2} = (0.5357)(-26.8)(-333.3) = 4786$$

8.25 试以 CB 的  $h$  参数表示, 求出图 8-19(a)放大器的(a)输入阻抗  $Z_{in}$ ; (b)电压增益  $A_v$ ; (c)电流增益  $A_i$ 。

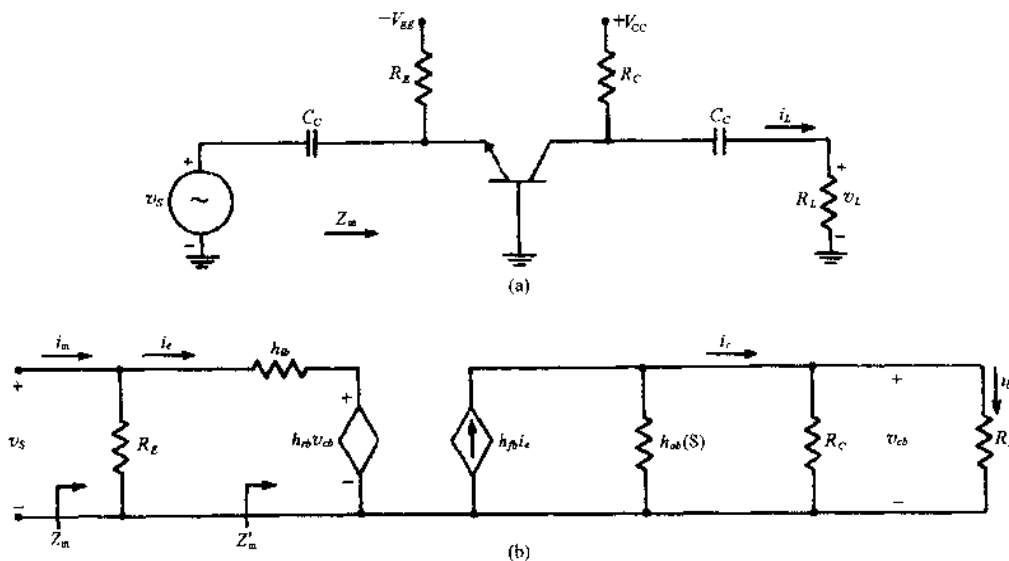


图 8-19

(a)在图 8-19(b)中给出了  $h$  参数等效电路。用欧姆定律,

$$v_{be} = \frac{h_{re} i_e}{h_{re} + (1/R_C) + (1/R_L)} \equiv \frac{h_{re} i_e}{G} \quad (1)$$

在输入应用 KVL 给出

$$v_s = h_{re} v_{be} + h_{ie} i_e \quad (2)$$

将(1)代入(2)并求解  $Z_{in}' \equiv v_s / i_e$ 。最后, 求出  $Z_{in}$  为  $Z_{in}'$  与  $R_E$  的并联组合。

$$Z_{in} = \frac{R_E (h_{ie} G + h_{re} h_{ie})}{R_E G + h_{ie} G + h_{re} h_{ie}} \quad (3)$$

(b)在(1)与(2)之间消去  $i_e$ ,

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} = \frac{h_{ie} i_e}{h_{ie} G + h_{re} h_{ie}}$$

(c)用(1),

$$i_L = \frac{v_o}{R_L} = \frac{h_{ie} i_e}{R_L G} \quad (4)$$

在发射极节点用 KCL,

$$i_e = i_{in} - \frac{v_s}{R_E} = i_{in} - \frac{i_{in} Z_{in}}{R_E} = i_{in} \left( 1 - \frac{Z_{in}}{R_E} \right) \quad (5)$$

在(4)与(5)之间消去  $i_e$  以获得

$$A_i = \frac{i_L}{i_{in}} = \frac{h_{ie}}{R_L G} \left( 1 - \frac{Z_{in}}{R_E} \right)$$

8.26 将一个大的发射极旁路电容加至图 8-4(a)的电路, 并令  $V_{CC} = 24\text{V}$ ,  $R_C = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_E = 200\Omega$ 。假定按最大对称摆幅但有可忽略的功率损耗来选取  $R_1$  和  $R_2$ 。又令  $V_{CEQ} \approx 0$  和  $I_{CQ} = 0$ 。(a)求最大可能的不失真集电极电流振幅。计算当为这个最大不失真集电极

电流的 0、50%、100% 时的 (b)  $P_S$ , (c)  $P_O$ , (d)  $P_C$ , (e) 效率。输出信号取自共有的集电极端。

$$(a) \quad \text{最大振幅} = I_{CQ} = \frac{1}{2} \left( \frac{V_{CC}}{R_C + R_E} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{24}{5000 + 200} \right) = 2.308 \text{mA}$$

于是计算要当  $I_{cm} = 0, 1.154, 2.308 \text{mA}$  时进行。

(b) 电源功率是与  $I_{cm}$  无关的, 给自

$$P_S = V_{CC} I_{CQ} = (24)(2.308 \times 10^{-3}) = 55.38 \text{mW}$$

(c) 传输至  $R_C$  的交流或信号功率平均值为

$$P_O = I_{cm}^2 R_C = \frac{I_{cm}^2 R_C}{2} = 2500 I_{cm}^2 (\text{W})$$

当在  $I_{cm} = 0, 1.154, 2.308 \text{mA}$  计算时, 此式分别给出 0, 3.33, 13.32mW。

(d) 由 (8.32), 集电极功率为

$$P_C = P_S - I_{CQ}^2 (R_C + R_E) - P_O = (27.7 \times 10^{-3}) - P_O (\text{W})$$

代入由 (c) 得的三个值, 得到 27.7, 24.37, 14.38mW。

$$(e) \quad \eta = \frac{P_O}{P_S} \times 100\% = 0, \frac{333}{55.38}, \frac{1332}{55.38} = 0, 6.01\%, 24.04\%$$

在图 8-20 中画出了全部结果。

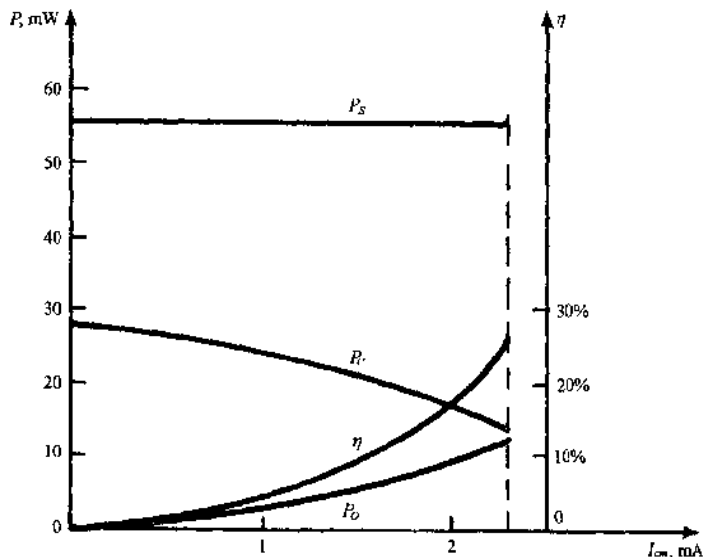


图 8-20

### 补充习题

8.27 若晶体管漏电流是  $I_{CBO} = 5 \mu\text{A}$  和  $I_{CEO} = 0.4 \text{mA}$ , 并设  $I_B = 30 \mu\text{A}$ , 求  $I_C$  的值。

答 2.77mA

8.28 一个晶体管有跨接于集电极端与发射极端的 10V 直流电源, 以正常的极性反向偏置了集电极基极结; 基极保持开路。集电极电路中的微安表读出  $800 \mu\text{A}$ 。(a) 如果这个晶体管的  $\alpha = 0.98$ , 漏电流  $I_{CBO}$  的值是多少? (b) 如果这个晶体管是硅器件且在  $25^\circ\text{C}$  时  $I_{CBO} = 3 \mu\text{A}$ , 在读取数据时它的温度是多少?

答 (a)  $16 \mu\text{A}$ ; (b)  $39.5^\circ\text{C}$

8.29 用如图 8-21 中的电流源能够模拟集电极至基极漏电流, 很明白, 晶体管作用关系到电流  $I'_C$ ,  $I'_B$  和  $I_E$  ( $I'_C = \alpha I_E$  和  $I'_C = \beta I'_B$ )。试证明

$$(a) I_C = \beta I_B + (\beta + 1) I_{CBO} \quad (b) I_B = \frac{I_E}{\beta + 1} - I_{CBO}$$



$$(c) I_E = \frac{\beta + 1}{\beta} (I_C + I_{CBO})$$

8.30 如果用一个其  $\alpha$  大了 1% 的新晶体管替换题 8.4 的晶体管, 发射极电流的百分率改变将是多少?

答 96.07% 增大

8.31 对于图 8-10 的电路,  $V_{CEQ} = 0.2V$ ,  $\alpha = 0.99$ ,  $I_{BQ} = 20\mu A$ ,  $V_{CC} = 15V$ ,  $R_C = 15k\Omega$ ,  $V_{CEQ}$  的值是多少?

答  $V_{CEQ} = V_{CEQ} = 0.2V$

8.32 由于当截止时  $P_C \approx 0$  而当饱和时  $P_C$  很小, 在许多开关应用中允许晶体管无散热片使用。试以计算 (a) 题 8.6 (有效区偏置) 和 (b) 题 8.31 (饱和区偏置) 中的集电极功率损耗来支持这个论点。

答 (a) 18mW; (b) 0.39mW

8.33 在图 8-5(b) 中给出了图 8-10 晶体管的集电极特性。若  $I_{BQ} = 40\mu A$ ,  $V_{CC} = 15V$ ,  $R_C = 2.2k\Omega$ , 试确定晶体管的最小额定功率, 以保证没有热损坏的危险。

答 22.54mW

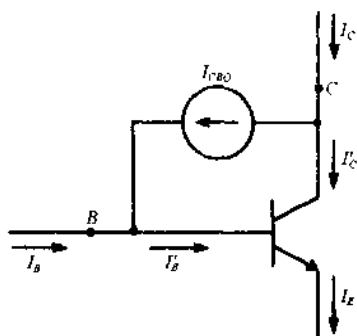


图 8-21

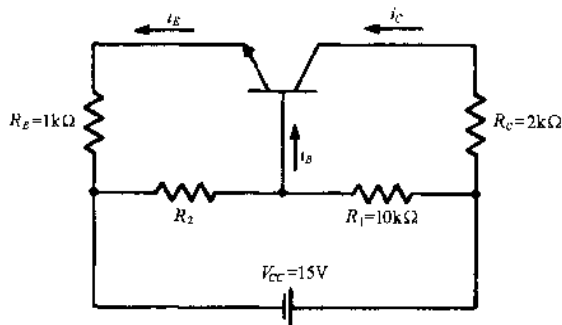


图 8-22

8.34 图 8-22 的电路举出了利用单一的直流电源偏置 CB 晶体管的方法图例。晶体管是硅器件 ( $V_{BEQ} = 0.7V$ ),  $\beta = 99$ ,  $I_{BQ} = 30\mu A$ 。试求 (a)  $R_2$ , (b)  $V_{CEQ}$ 。

答 (a) 3.36kΩ; (b) 6.06V

8.35 如果  $R_2 = 5k\Omega$  而其余全保持不变, 试研究题 8.11(a)。

答 围绕  $I_{CQ} = 16.84mA$  的  $\pm 13.16mA$

8.36 因为不良的焊接, 题 8.11(a) 的电阻  $R_1$  变成开路。试计算将看到的  $I_{CQ}$  百分率改变。

答 +508.5%

8.37 题 8.11(a) 的电路具有  $\beta$  无关的偏置 ( $R_E \geq 10R_B/\beta$ )。当  $\beta = 110$  时, 如果  $I_{CQ}$  可以从它的值最多改变  $\pm 2\%$ , 试求  $\beta$  的容许范围。

答  $86.4 \leq \beta \leq 149.7$

8.38 试证明交流负载线截取集电极特性坐标轴于  $I_{CQ} + (V_{CEQ}/R_{ac})$  和  $V_{CEQ} + I_{CQ}R_{ac}$ 。

8.39 关于图 8-16 的电路,  $v_s = 0.25\cos\omega t$  (V),  $R_B = 30k\Omega$ ,  $V_B = 1V$ ,  $V_{CC} = 12V$ 。晶体管是基极至发射极电阻可忽略的硅器件。假定  $V_{CEQ} \approx 0$  和  $I_{CBO} = 0$ 。试求当为 A 类工作时  $R_L$  的范围。

答  $R_L \leq 6.545k\Omega$

8.40 一个 CE 晶体管放大器工作在有效区中, 具有  $V_{CC} = 12V$ ,  $R_{dc} = 2k\Omega$ 。如果以图 8-5(c) 给出集电极特性且基极静态电流是  $30\mu A$ , 求 (a)  $h_{fe}$  和 (b)  $h_{oe}$ 。

答 (a) 190; (b) 83.33 $\mu S$

8.41 关于图 8-23 的电路,  $h_{re} = 10^{-4}$ ,  $h_{ie} = 200\Omega$ ,  $h_{fe} = 100$ ,  $h_{oe} = 100\mu S$ 。(a) 按电流增益与电压增益的乘积, 求出功率增益  $A_p = |A_{Av}|$ 。(b) 确定使功率增益达到最大值时  $R_L$  的数值。

答 (a)  $h_{fe}^2 / [(h_{ie}R_L + 1)(h_{oe}h_{ie} - h_{re}h_{fe} + h_{oe}R_L^{-1})]$ ; (b) 14.14k $\Omega$

8.42 如果将一个大的发射极旁路电容加至图 8-4(a) 的电路并设  $R_1$  和  $R_2$  中的功率损耗是可忽略的, 试证明晶体管集电极中的功率损耗为

$$P_C = V_{CEQ}I_{CQ} - \frac{I_{cm}^2 R_C}{2}$$

8.43 在  $h_{re} = h_{oe} = 0$  的假设下, 证明 CBA 参数等效电路的输入阻抗给自  $h_{ib} = h_{ie} / (h_{fe} + 1)$ 。

[提示: 用当  $v_{ib} = 0$  时的式 (8.23)。]

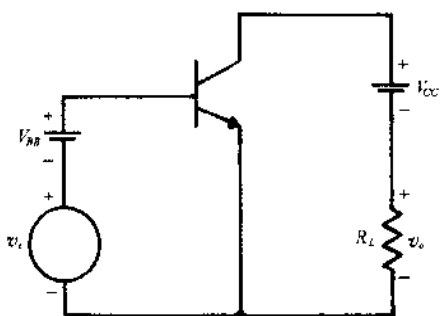


图 8-23

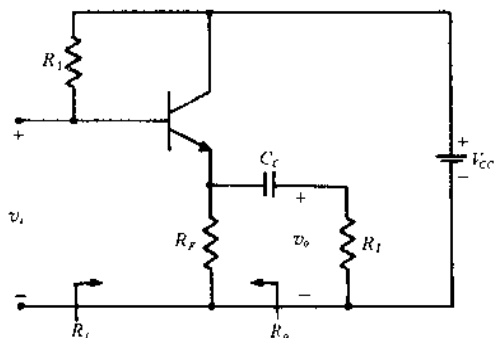


图 8-24

- 8.44 图 8-24 的恒基极电流偏置射极跟随放大器使用了一个具有可忽略的漏电流和  $\beta = 59$  的硅晶体管。另外,  $V_{CC} = 15\text{V}$ ,  $V_i = 3\text{V}$  ( $v_o$  的直流分量),  $R_F = 1.5\text{k}\Omega$ 。试计算 (a)  $R_1$ ; (b) 输出电阻  $R_o$ ; (c) 输入电阻  $R_i$ 。

答 (a)  $339\text{k}\Omega$ ; (b)  $1.185\text{k}\Omega$ ; (c)  $50.98\text{k}\Omega$

- 8.45 对于题 8.11(a) 的电路, 试求 (a)  $R_1$ , (b)  $R_2$ , (c)  $R_C$ , (d)  $R_E$ , (e) 集电极中的静态功率损耗, (f) 直流电源输出多少功率?

答 (a)  $1.42\text{mW}$ ; (b)  $11.8\text{mW}$ ; (c)  $7.16\text{mW}$ ;

(d)  $4.86\text{mW}$ ; (e)  $61.24\text{mW}$ ; (f)  $86.55\text{mW}$

- 8.46 图 8-12 电路中的硅晶体管有可忽略的漏电流和  $\beta = 90$ 。令  $R_B = 500\text{k}\Omega$ ,  $R_C = 3\text{k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 15\text{V}$ 。如果这个晶体管在  $25^\circ\text{C}$  时额定为  $50\text{mW}$  (集电极功率) 并按制造厂技术条件, 当温度高于  $25^\circ\text{C}$  时必须以  $1.2\text{mW}/^\circ\text{C}$  降低, 这个电路能够安全工作的最高环境温度是多少? 假定为温度无关的各电阻值。

答  $51^\circ\text{C}$

- 8.47 放大器电路的稳定度因数

$$S_I = \frac{\partial I_C}{\partial I_{CO}}$$

是对于它的  $Q$  点随温度改变时灵敏度的一种计量。试利用题 8.29 的结果求出图 8-11①电路 (一种通常接法) 的稳定度因数。

$$\text{答 } S_I = \frac{R_E + R_B}{R_E + (1 - \alpha)R_B}$$

- 8.48 关于图 8-25 的达林顿射极跟随器, 有  $h_{re1} = h_{re2} = h_{oe1} = h_{oe2} = 0$ 。以 (非零的)  $h$  参数表示, 求出 (a)  $Z'_m$ ; (b) 电压增益  $A_v \equiv v_E/v_S$ ; (c) 电流增益  $A_i \equiv i_{E2}/i_m$ ; (d)  $Z_m$ ; (e)  $Z_o$  (设信号源有内阻  $R_S$ ) 的表达式。

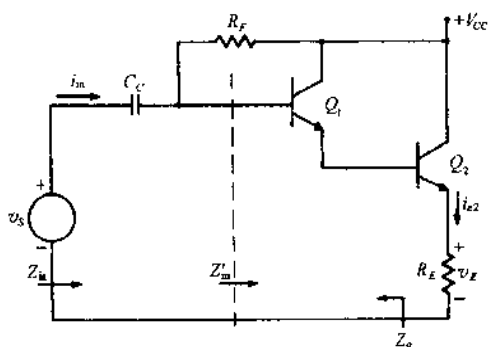


图 8-25

答 (a)  $Z'_m = h_{ie1} + (h_{fe1} + 1)[h_{ie2} + (h_{fe2} + 1)R_E]$

$$(b) A_v = \frac{(h_{fe1} + 1)(h_{fe2} + 1)R_E}{Z'_m}$$

$$(c) A_i = \frac{(h_{fe1} + 1)(h_{fe2} + 1)R_E}{R_E + Z'_m}$$

$$(d) Z_m = \frac{R_F Z'_m}{R_F + Z'_m}$$

$$(e) Z_o = h_{ie2} + \frac{[R_S R_E / (R_S + R_F)] + h_{ie1}}{(h_{fe1} + 1)(h_{fe2} + 1)}$$

① 原著中为“图 8-21”。——译者注

## 第9章 场效应晶体管

场效应晶体管(FET)的工作可以仅依据多数载流子(一种极性)电荷的流动来加以解释,因此这种晶体管也称做单极晶体管。其中结型场效应晶体管(JFET)和金属氧化物半导体场效应晶体管(MOSFET)两类场效应器件被广泛应用。

### 9.1 结型场效应管的结构和符号

图9-1中示出了JFET的实际构造和符号。导电用的是电荷载流子从源极(S)经过栅极局部之间的路径(沟道)到达漏极(D)的通道。

晶体管可以是n沟道的(靠电子导电),也可以是p沟道的(靠空穴导电);如果用了互补的(符号相反)电压和电流,那么任何n沟道器件的论述也都适用于p沟道器件。表9-1列出了JFET与BJT之间的相似性。场效应管的电流和电压符号类似于表9-1。

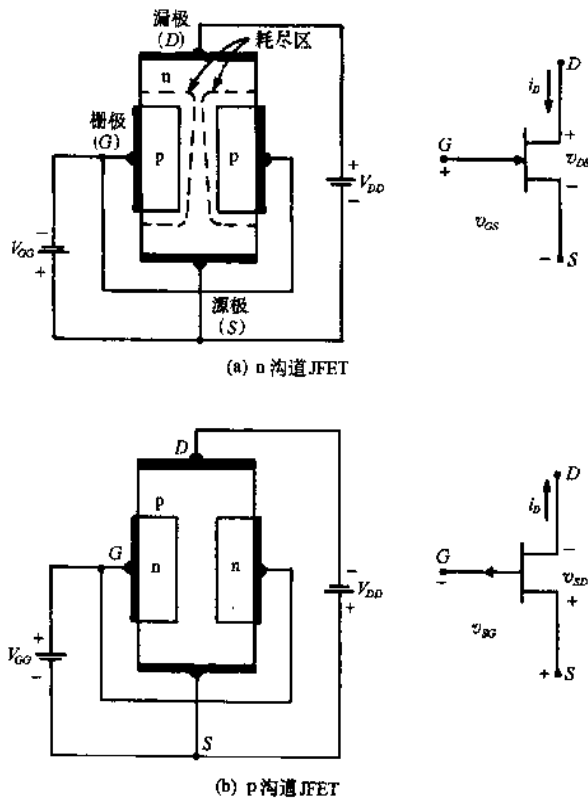


图 9-1

表 9-1

JFET	BJT
源极(S)	发射极(E)
漏极(D)	集电极(C)
栅极(G)	基极(B)
漏极电源( $V_{DD}$ )	集电极电源( $V_{CC}$ )
栅极电源( $V_{GG}$ )	基极电源( $V_{BB}$ )
漏极电流( $i_D$ )	集电极电流( $i_C$ )

## 9.2 结型场效应管的端极特性

JFET 几乎普遍采用图 9-1 的共源极(CS)双口接法,其中  $v_{GS}$  提供栅极源极 pn 结的反向偏置。由此引起的栅极漏电流对于大多数分析来说小到可以忽略,因此允许将栅极作为开路处理。于是,不需要输入特性曲线。

图 9-2(a)给出了当  $v_{GS} \leq 0$  时 CS 连接 n 沟道 JFET 的输出或漏极特性。对于  $v_{GS}$  的一个恒定值,一直到反向偏置栅极源极结的耗尽区扩展到沟道的宽度(称做夹断的状况)为止,这个 JFET 表现为一个线性电阻器件(欧姆区)。在夹断以上、雪崩击穿以下,当  $v_{DS}$  增大时漏极电流  $i_D$  保持为近似恒定。为了技术条件的目的,现定义栅极短路参数  $I_{DSS}$  和  $V_{p0}$ ,如图 9-2(a)所示;典型地,  $V_{p0}$  在 4V 至 5V 之间。当栅极电位降低时,出现夹断时的源极至漏极电压( $V_p$ )也降低,近似地遵守方程

$$V_p = V_{p0} + v_{GS} \quad (9.1)$$

适当的近似之下,在夹断区内当  $v_{DS}$  为恒定值时,漏极电流相对于源极至栅极电压显示出平方的关系:

$$i_D = I_{DSS} \left( 1 + \frac{v_{GS}}{V_{p0}} \right)^2 \quad (9.2)$$

这个公式说明了图 9-2(a)中特性曲线的垂直间隔是不等的。图 9-2(b)是式(9.2)的图像,称为转移特性,在确定偏置时要使用它。也用一条  $v_{DS} = \text{常数}$  的竖直线与漏极特性的交点求得转移特性。实际上在夹断区内的漏极特性是水平的,推广到对于全部的  $V_{DS} > V_{p0}$  范围,可以求得完全相同的转移特性。(见有轻微非理想情况的图 9-4。)

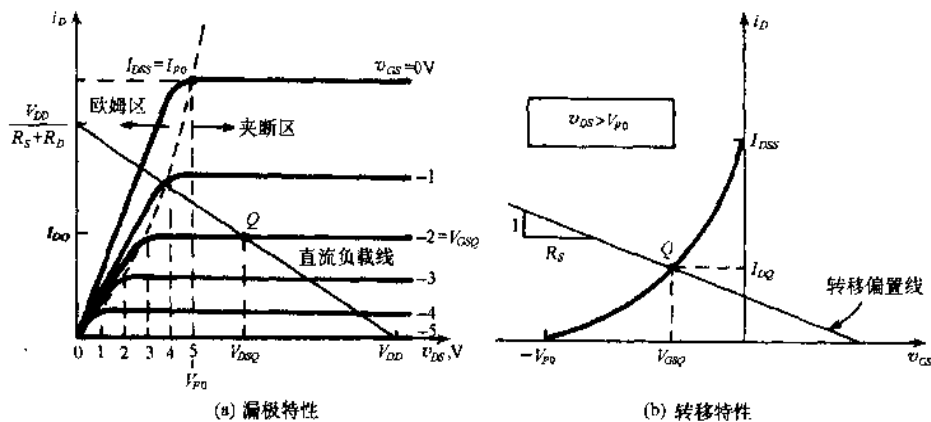


图 9-2 CSn 沟道 JFET

## 9.3 偏置线和负载线

通常使用的图 9-3(a)分压器偏置接法可以简化为图 9-3(b)中的等效电路,其中的戴维南参数为

$$R_G = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad V_{GG} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{DD} \quad (9.3)$$

由于  $i_G = 0$ , 对环绕图 9-3(b)的栅极源极回路应用 KVL, 可以得出转移偏置线的方程为

$$i_D = \frac{V_{GG}}{R_S} - \frac{v_{GS}}{R_S} \quad (9.4)$$

此式与式(9.2)联立,或画在图 9-2(b)上如所示,可以得出所需三个静态变量中的两个静态变量  $I_{DQ}$  和  $V_{GSQ}$ 。

环绕图 9-3(b)中漏极源极回路的 KVL 可以导出直流负载线的方程为

$$i_D = \frac{V_{DD}}{R_S + R_D} - \frac{v_{DS}}{R_S + R_D} \quad (9.5)$$

当将此式画在图 9-2(a) 的漏极特性上时, 可以得出剩下的静态值  $V_{DSQ}$ 。用另一方法, 当  $I_{DQ}$  确定后, 有

$$V_{DSQ} = V_{DD} - (R_S + R_D)I_{DQ}$$

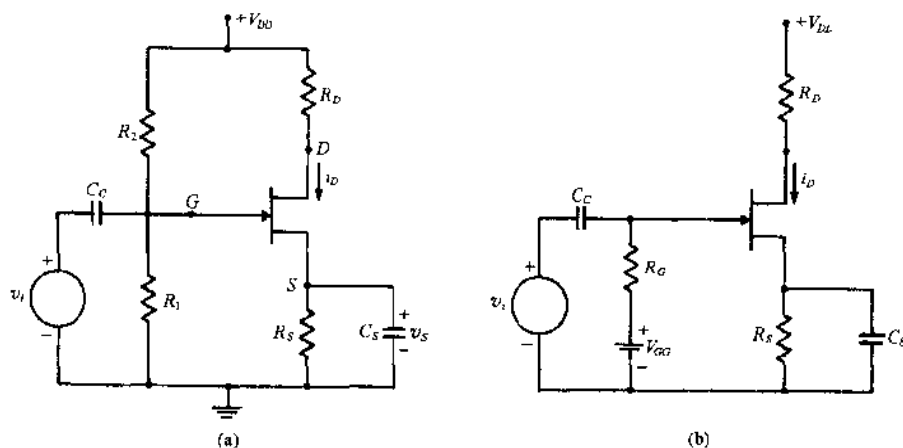


图 9-3

**例 9.1** 关于图 9-3(a) 的放大器,  $V_{DD} = 20V$ ,  $R_1 = 1M\Omega$ ,  $R_2 = 15.7M\Omega$ ,  $R_D = 3k\Omega$ ,  $R_S = 2k\Omega$ 。如果以图 9-4 给出 JFET 特性, 试求出 (a)  $I_{DQ}$ , (b)  $V_{GSQ}$ , (c)  $V_{DSQ}$ 。

**解** (a) 根据式(9.3), 有

$$V_{GS} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{DD} = \frac{1 \times 10^6}{16.7 \times 10^6} \times 20 = 1.2V$$

在图 9-4(a) 上绘制转移偏置线, 交转移特性于 Q 点, 得出

$$I_{DQ} = 1.5mA$$

(b) 同时

$$V_{GSQ} = -2V$$

(c) 在漏极特性上绘制以  $v_{DS}$  截距为  $V_{DD} = 20V$  和  $i_D$  截距为  $V_{DD}/(R_S + R_D) = 4mA$  的直流负载线。Q 点被确定在 (a) 中的  $I_{DQ} = 1.5mA$  [和在 (b) 中的  $V_{GSQ} = -2V$ ]; 它的横坐标为  $V_{DSQ} = 12.5V$ 。解析上,

$$V_{DSQ} = V_{DD} - (R_S + R_D)I_{DQ} = 20 - (5 \times 10^3)(1.5 \times 10^{-3}) = 12.5V$$

**确立 Q 点定位界限的偏置**

类似于 BJT 中的  $\beta$  不一致, 场效应管的据极短路参数  $I_{DSS}$  和  $V_{p0}$  在同类器件中也可能很不一致, 但可以通过设置栅极源极偏置, 将 Q 点和随之静态漏极电流限制到一定的极限。

参数不一致的极端值通常由制造厂给定, 可以利用式(9.2)确立上限和下限的(最差情况)转移特性, 如图 9-5 所示。上限和下限的静态点  $Q_{max}$  和  $Q_{min}$  由它们的纵坐标  $I_{DQmax}$  和  $I_{DQmin}$  确定; 在标称漏极特性族上叠画出直流负载线, 根据沿着直流负载线  $I_{DQ}$  的最大允许变动确定  $I_{DQmax}$  和  $I_{DQmin}$ 。选取  $R_D + R_S$  使  $V_{DS}$  保持在标称漏极特性上所希望区域内来确立直流负载线。

现在如果挑选  $R_S$  的值使

$$R_S \geq \frac{|V_{GSQmax} - V_{GSQmin}|}{I_{DQmax} - I_{DQmin}} \quad (9.6)$$

并且将具有斜率为  $-1/R_S$ 、 $v_{GS}$  截距为  $V_{GS} > 0$  的转移偏置线如图 9-5 那样画出, 可以使标称 Q 点被强制位于  $Q_{max}$  以下和  $Q_{min}$  以上, 使

$$I_{DQmin} \leq I_{DQ} \leq I_{DQmax}$$

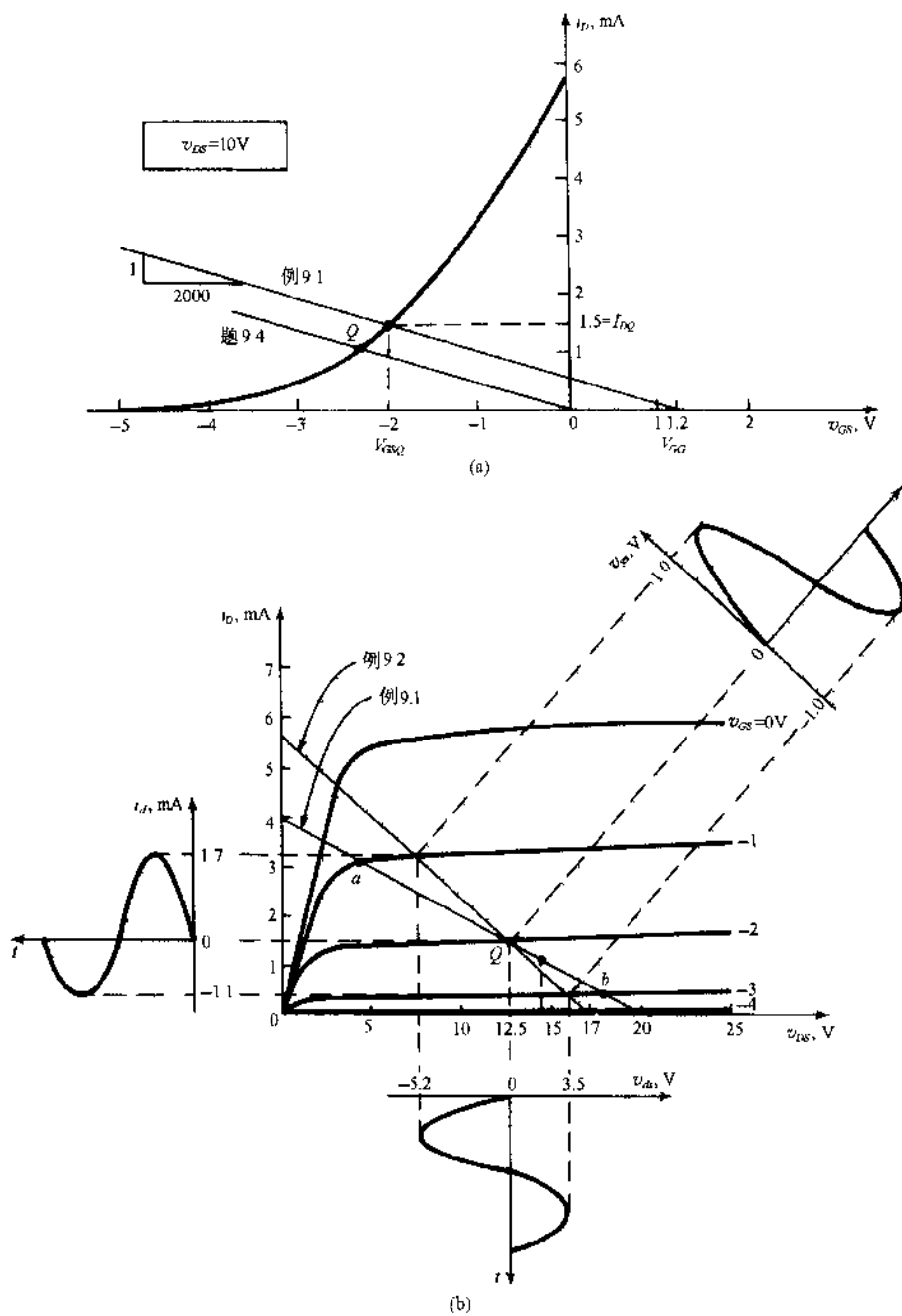


图 9-4

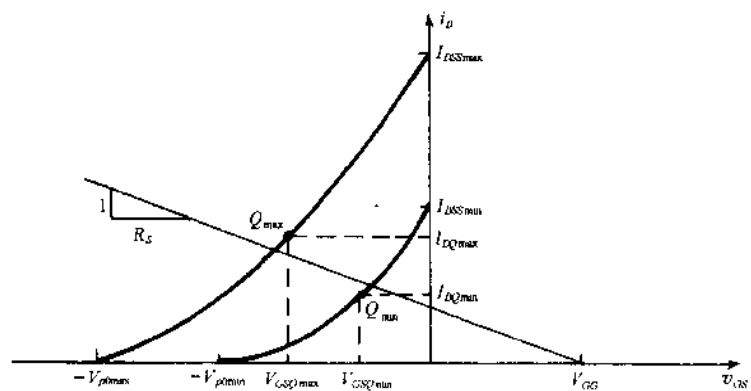


图 9-5

当  $R_S$ 、 $R_D$ 、 $V_{GS}$  选定后, 将  $R_L$  选取得足够大以给出满意的输入阻抗,  $R_1$  和  $R_2$  就可由方程式(9.3)确定。一般,  $R_S$  在量值方面将可与  $R_D$  相比; 为了获得所希望的交流增益, 在  $R_S$  上必须用类似于 8.7 节的分析技术, 用一个旁路电容引出了交流负载线。

#### 9.4 结型场效应管放大器的图解分析

由于  $v_{GS}$  与  $i_D$  的平方律关系导致了信号失真, 因此图解分析对 JFET 的交流大信号情况比较有利。

**例 9.2** 对于例 9.1 的放大器, 令  $v_i = \sin t$  ( $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ) 和  $C_S \rightarrow \infty$ 。试用图解分析法求出  $v_{ds}$  和  $i_d$ 。

**解** 由于  $C_S$  对交流信号表现为短路, 必须在图 9-4(b) 上添加通过 Q 点且交  $v_{DS}$  轴于

$$V_{DSQ} + I_{DQ}R_{\infty} = 12.5 + 1.5 \times 3 = 17\text{V}$$

的交流负载线。绘制一条经过 Q 点垂直于交流负载线的辅助时间轴。在图 9-4(b) 中已绘制了两条辅助坐标轴, 以显示当  $v_{gs} = v_i$  沿交流负载线摆动  $\pm 1\text{V}$  时  $i_d$  和  $v_{ds}$  的偏移。注意由 JFET 特性的平方律效应引起两个信号的失真。

#### 9.5 结型场效应管的小信号等效电路

由图 9-2(a) 看出, 如果将  $i_D$  作为 CS 连接 JFET 的因变量, 则

$$i_D = f(v_{GS}, v_{DS}) \quad (9.7)$$

对于在 Q 点附近的小偏移(交流信号),  $\Delta i_D = i_d$ ; 于是, 将链式法则应用到式(9.7)可以导出

$$i_d = \Delta i_D \approx di_D = g_m v_{gs} + \frac{1}{r_{ds}} v_{ds} \quad (9.8)$$

式中偏导数表示如下:

$$\text{跨导 } g_m \equiv \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta i_D}{\Delta v_{GS}} \right|_Q \quad (9.9)$$

$$\text{源极漏极电阻 } r_{ds} \equiv \left. \frac{\partial v_{DS}}{\partial i_D} \right|_Q \approx \left. \frac{\Delta v_{DS}}{\Delta i_D} \right|_Q \quad (9.10)$$

只要 JFET 在夹断区内工作, 则  $i_G = i_g = 0$ , 相当于栅极开路。由这一点连同式(9.8)可以导出图 9-6(a) 所示的电流源等效电路模型。在题 9.5 中导出图 9-6(b) 的电压源模型。

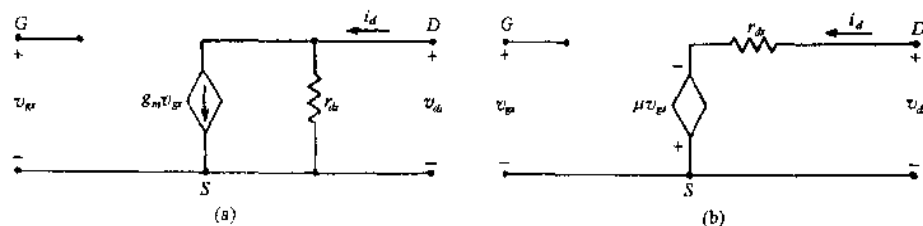


图 9-6 CS JFET 的小信号模型

#### 9.6 MOS 场效应管的结构和符号

n 沟道 MOSFET (见图 9-7) 仅有单一的 p 区(称做衬底), 它的一边作为导电沟道。金属栅极被绝缘金属氧化物(通常为  $\text{SiO}_2$ ) 隔离, 器件的名称绝缘栅场效应管(IGFET)就由此而来。互换 p 半导体材料与 n 半导体材料构成的 p 沟道 MOSFET 用互补的电压和电流来描述。

#### 9.7 MOS 场效应管的端极特性

在 n 沟道 MOSFET 中, 栅极(正极板)、金属氧化物层(介质)、衬底(负极板)构成电容, 其中电场控制着沟道电阻。当栅极正电位达到阈值电压  $V_T$  (典型 2 至 4V) 时, 直接吸引充足的自由

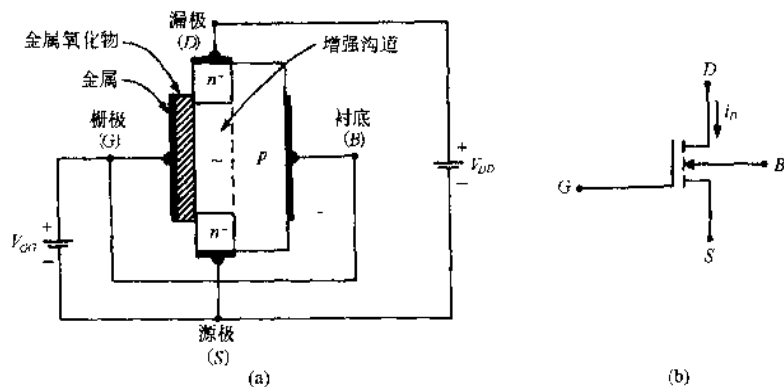
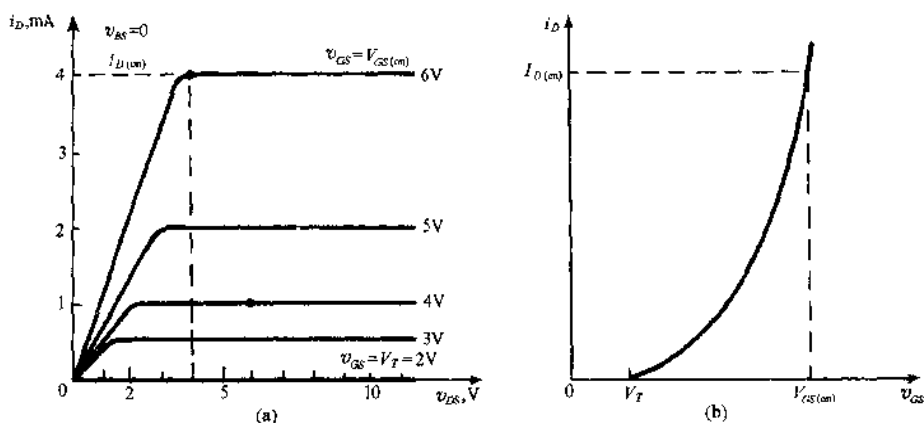


图 9-7

电子到金属氧化物层附近(称为增强型工作),感应出低电阻率的导电通道。若增大源极至漏极电压,增强沟道靠近漏极区域自由电荷载流子被耗尽,像 JFET 一样出现夹断。图 9-8 中示出了用  $V_T = 2\text{V}$  举例的典型漏极特性和转移特性。通常制造厂给定  $V_T$  和夹断电流的值  $I_{D(\text{on})}$ ; 源极至栅极电压的对应值为  $V_{GS(\text{on})}$ 。

图 9-8  $n$  沟道增强型 MOSFET 的特性

如按图 9-9(a)将衬底短接至源极,则将式(9.1)和(9.2)中的  $V_{p0}$  和  $I_{DSS}$  分别换以  $-V_T$  和  $I_{D(\text{on})}$ ,就可以用来描述在夹断区内工作的增强型 MOSFET。

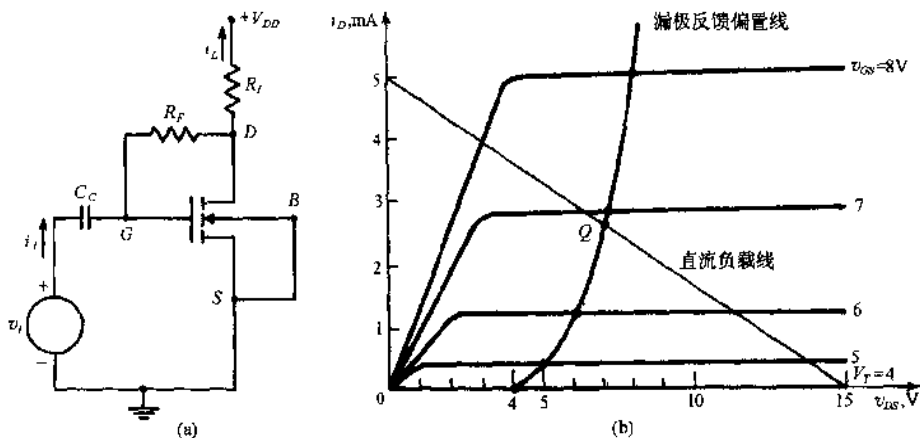


图 9-9



## 9.8 增强型 MOS 场效应管的偏置

分压器偏置(见图 9-3)可以很容易地应用到增强型 MOSFET;但是,由于  $V_{GSQ}$  与  $V_{DSQ}$  是同极性的,在图 9-9(a)中所举例的漏极反馈偏置的方法却能够用来部分地补偿 MOSFET 特性的一致。

**例 9.3** 对于图 9-9(a)的放大器,  $V_{DD} = 15V$ ,  $R_L = 3k\Omega$ ,  $R_F = 50M\Omega$ 。若以图 9-9(b)给出 MOSFET 漏极特性,试求出各静态量的值。

**解** 在图 9-9(b)上绘出具有  $v_{DS}$  截距  $V_{DD} = 15V$  和  $i_D$  截距  $V_{DD}/R_L = 5mA$  的直流负载线。

当栅极电流为可忽略时,  $R_F$  两端不出现电压,而  $V_{GS} = V_{DS}$ 。图 9-6(b)的漏极反馈偏置线是当  $V_{GS} = V_{DS}$  时点的轨迹。由于  $Q$  点必须位于直流负载线和漏极反馈负载线二者之上,它们的交点就是  $Q$  点。由图 9-9(b)得出,  $I_{DQ} \approx 2.65mA$ ,  $V_{DSQ} = V_{GSQ} \approx 6.90V$ 。

### 例题解答

**9.1** 如果例 9.1 中的  $C_S = 0$  而其余全不改变,试求其中  $v_S$  摆动的极端值。

电压  $v_S$  将沿着图 9-4(b)的直流负载线从点  $a$  到点  $b$  摆动,给出  $i_D$  的极端值为  $3.1mA$  和  $0.4mA$ 。对应的  $v_S = i_D R_S$  极端值为  $6.2V$  和  $0.8V$ 。

**9.2** 关于例 9.1 的 JFET 放大器,试利用漏极特性求出小信号等效电路的常数(a)  $g_m$  和(b)  $r_{ds}$ 。(c)换个方法,由转移特性计算  $g_m$ 。

(a)令  $v_{GS}$  相对于图 9-4(b)的  $Q$  点改变  $\pm 1V$ ;由式(9.9),得

$$g_m \approx \left. \frac{\Delta i_D}{\Delta v_{GS}} \right|_Q = \frac{(3.3 - 0.3) \times 10^{-3}}{2} = 1.5mS$$

(b) 在图 9-4(b)的  $Q$  点处,当  $v_{DS}$  由  $5V$  变至  $20V$  时,  $i_D$  由  $1.4mA$  变至  $1.6mA$ ,由式(9.10),得

$$r_{ds} \approx \left. \frac{\Delta v_{DS}}{\Delta i_D} \right|_Q = \frac{20 - 5}{(1.6 - 1.4) \times 10^{-3}} = 75k\Omega$$

(c) 在图 9-4(a)的  $Q$  点处,当  $i_D$  由  $1mA$  变至  $2mA$  时,  $v_{GS}$  由  $-2.4V$  变至  $-1.75V$ ;由式(9.9),得

$$g_m \approx \left. \frac{\Delta i_D}{\Delta v_{GS}} \right|_Q = \frac{(2 - 1) \times 10^{-3}}{-1.75 - (-2.4)} = 1.54mS$$

**9.3** 关于例 9.3 的 MOSFET 放大器,令  $V_{GSQ} = 6.90V$ 。试由在 9.7 节中发展了的式(9.2)类推,计算出  $I_{DQ}$ 。

由图 9-9(b)的漏极特性,看出  $V_T = 4V$  和在  $V_{GS(m)} = 8V$  时  $I_{D(m)} = 5mA$ 。于是

$$I_{DQ} = I_{D(m)} \left( 1 - \frac{V_{GSQ}}{V_T} \right)^2 = (5 \times 10^{-3}) \left( 1 - \frac{6.90}{4} \right)^2 = 2.63mA$$

(对照例 9.3)

**9.4** 用一种称做自偏置的方法,可以只用一个由栅极到地的电阻来确立 JFET 放大器的  $Q$  点[当  $V_{GS} = 0$  时的图 9-3(b)]。如果  $R_D = 3k\Omega$ ,  $R_S = 2k\Omega$ ,  $R_G = 5M\Omega$ ,  $V_{DD} = 20V$ ,以图 9-4 给出 JFET 特性,试求(a)  $I_{DQ}$ , (b)  $V_{GSQ}$ , (c)  $V_{DSQ}$ 。

(a)在图 9-4(a)上绘制一条具有  $V_{GS}$  截距  $V_{GS} = 0$  和斜率  $-1/R_S = -0.5mS$  的转移偏置线;它与转移特性交点的纵坐标就是  $I_{DQ} = 1.15mA$ 。

(b)图 9-4(a)的  $Q$  点横坐标就是  $V_{GSQ} = -2.3V$ 。

(c)按例 9.1 已经画在图 9-4(b)上的直流负载线仍适用。 $Q$  点确立在(a)中的  $I_{DQ} = 1.15mA$ ;对应的横坐标就是  $V_{DSQ} \approx 14.2V$ 。

**9.5** 试由图 9-6(a)的电流源小信号模型推导出图 9-6(b)的电压源模型。

求出由图 9-6(a)输出端向左看的戴维南等效电路。如果取消全部独立源,则  $v_{gs} = 0$ ;于是  $g_m v_{gs} = 0$ ,即相关源也被取消(对电流源为开路),而戴维南电阻为  $R_{th} = r_{ds}$ 。呈现在输出端的开路电压

为  $v_{th} = v_{ds} = -g_m v_{gs} r_{ds} = -\mu v_{gs}$ , 这里已经定义了一个新的等效电路常数

$$\text{放大因数 } \mu = g_m r_{ds}$$

$v_{th}$  与  $R_{th}$  的正常串联接法就可导出图 9-6(b)。

9.6 用一个以图 9-8 所表征的  $n$  沟道增强型 MOSFET 替换图 9-3 的 JFET。令  $V_{DD} = 8\text{V}$ ,  $V_{GSQ} = 4\text{V}$ ,  $I_{DQ} = 1\text{mA}$ ,  $R_1 = 5\text{M}\Omega$ ,  $R_2 = 3\text{M}\Omega$ 。试求出 (a)  $V_{DSQ}$ , (b)  $V_{GS}$ , (c)  $R_S$ , (d)  $R_D$ 。

解 (a) 可在图 9-8(a) 的漏极特性上将  $Q$  点定位于  $v_{GS} = V_{GSQ} = 4\text{V}$  和  $i_D = I_{DQ} = 1\text{mA}$ ;  $Q$  点的横坐标就是  $V_{DSQ} = 6\text{V}$ 。

(b) 用式(9.3)得,  $V_{GS} = R_2 V_{DD} / (R_1 + R_2) = 5\text{V}$ 。

(c) 环绕图 9-3(b) 的栅极源极回路应用 KVL 且有  $i_G = 0$ , 导出

$$R_S = \frac{V_{GS} - V_{GSQ}}{I_{DQ}} = \frac{5 - 4}{1 \times 10^{-3}} = 1\text{k}\Omega$$

(d) 利用环绕图 9-3(b) 漏极源极回路的 KVL 并对  $R_D$  求解可得到

$$R_D = \frac{V_{DD} - V_{DSQ} - I_{DQ} R_S}{I_{DQ}} = \frac{8 - 6 - (1 \times 10^{-3})(1 \times 10^3)}{1 \times 10^{-3}} = 1\text{k}\Omega$$

9.7 对于图 9-9(a) 漏极反馈偏置放大器,  $R_F = 5\text{M}\Omega$ ,  $R_L = 14\text{k}\Omega$ ,  $r_{ds} = 40\text{k}\Omega$ ,  $g_m = 1\text{mS}$ 。试求 (a)  $A_v (= v_{ds}/v_i)$ , (b)  $Z_{in}$ , (c) 经由漏极源极端点向里看的  $Z_o$ , (d)  $A_i (= i_L/i_i)$  ①。

解 (a) 在图 9-10 中给出了电压源小信号等效电路。以  $v_{ds}$  作为节点电压,

$$\frac{v_i - v_{ds}}{R_F} = \frac{v_{ds}}{R_L} + \frac{\mu v_i}{r_{ds}} \quad (1)$$

解(1)求电压增益比并用  $\mu = g_m r_{ds}$  得到

$$\begin{aligned} A_v = \frac{v_{ds}}{v_i} &= \frac{R_L r_{ds} (1 - R_F g_m)}{R_F r_{ds} + R_L r_{ds} + R_L R_F} \\ &= \frac{(14 \times 10^3)(40 \times 10^3)[1 - (5 \times 10^6)(1 \times 10^{-3})]}{(5 \times 10^6)(40 \times 10^3) + (14 \times 10^3)(40 \times 10^3) + (14 \times 10^3)(5 \times 10^6)} \\ &= -10.35 \end{aligned}$$

(b) 环绕图 9-10 输出回路的 KVL 给出

$$v_i = i_i R_F + v_{ds} = i_i R_F + A_v v_i$$

由此

$$Z_{in} = \frac{v_i}{i_i} = \frac{R_F}{1 - A_v} = \frac{5 \times 10^6}{1 - (-10.35)} = 440\text{k}\Omega$$

(c) 在取消独立源  $v_i$  之后求出激励点阻抗  $Z_o$ 。当  $v_i = 0$  时,  $\mu v_i = \mu v_{gs} = 0$ , 而

$$Z_o = \frac{r_{ds} R_F}{r_{ds} + R_F} = \frac{(40 \times 10^3)(5000 \times 10^3)}{5040 \times 10^3} = 39.68\text{k}\Omega$$

(d)  $A_i = \frac{i_L}{i_i} = \frac{v_{ds}/R_L}{v_i/Z_{in}} = \frac{A_v Z_{in}}{R_L} = \frac{(-10.35)(440 \times 10^3)}{14 \times 10^3} = -325.3$

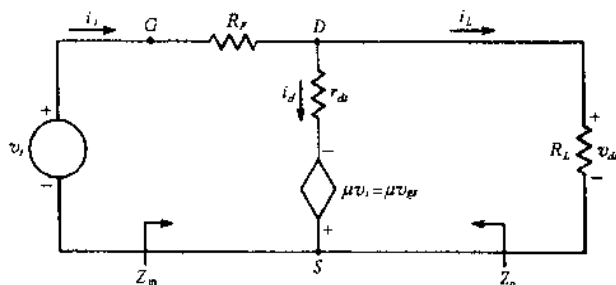


图 9-10

9.8 对于图 9-11 中的 JFET 放大器,  $g_m = 2\text{mS}$ ,  $r_{ds} = 30\text{k}\Omega$ ,  $R_S = 3\text{k}\Omega$ ,  $R_D = R_L = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 200\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 800\text{k}\Omega$ ,  $r_i = 5\text{k}\Omega$ 。如果  $C_C$  和  $C_S$  都很大且放大器被偏置在夹断区, 试

① 原著中为  $i_i/i_L$ 。——译者注

求(a)  $Z_{in}$ , (b)  $A_v (= v_L/v_i)$ , (c)  $A_i (= i_L/i_i)$ 。

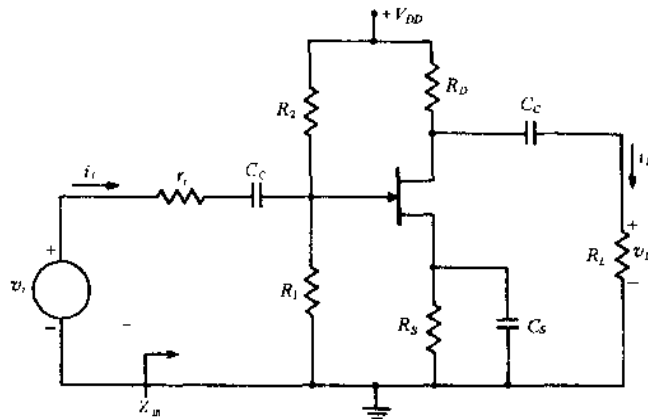


图 9-11

(a) 在图 9-12 中画出了电流源小信号等效电路。由于栅极吸收的是可忽略的电流,

$$Z_{in} = R_G = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(200 \times 10^3)(800 \times 10^3)}{1000 \times 10^3} = 160 \text{ k}\Omega$$

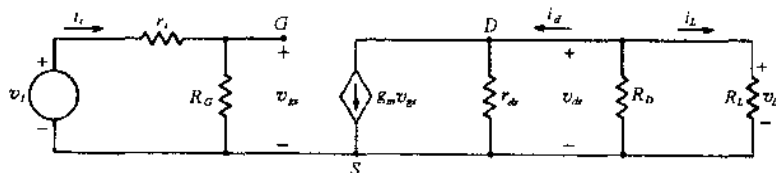


图 9-12

(b) 在输入回路用电压分配,

$$v_{gs} = \frac{R_G}{R_G + r_i} v_i = \frac{160 \times 10^3}{165 \times 10^3} v_i = 0.97 v_i \quad (1)$$

相关电流源激励进入  $R_{eq}$ , 这里

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r_{ds}} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_L} = \frac{1}{30 \times 10^3} + \frac{1}{2 \times 10^3} + \frac{1}{2 \times 10^3} = \frac{1}{967.74} \text{ S}$$

于是

$$v_L = -g_m v_{gs} R_{eq} \quad (2)$$

在(1)与(2)之间消去  $v_{gs}$ , 求得

$$A_v = \frac{v_L}{v_i} = -g_m \left( \frac{R_G}{R_G + r_i} \right) R_{eq} = -(2 \times 10^{-3} \times 0.97 \times 967.74) = -1.88$$

$$(c) A_i = \frac{i_L}{i_i} = \frac{v_L / R_L}{v_i / (R_G + r_i)} = \frac{A_v (R_G + r_i)}{R_L} = \frac{(-1.88)(165 \times 10^3)}{2 \times 10^3} = -155.1$$

9.9 如果需要低的栅极源极偏置电压值, 图 9-13 的 JFET 放大器引入了一种偏置方法(自偏置), 甚至提供了极高的输入阻抗。试求出由  $ab$  向左看的戴维南等效电压和等效电阻。

当  $ab$  开路时,  $R_3$  两端没有电压降, 呈现在开路端点的电压由  $R_1$ - $R_2$  分压器求出, 即

$$v_{th} = V_{GS} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{DD}$$

当取消(短接)  $V_{DD}$  时由  $ab$  向左看的电阻为

$$R_{th} = R_G = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

如果将  $R_3$  选取得很大, 则无论  $R_1$  和  $R_2$  的值是怎样,  $R_G = R_{th}$  就是很大, 这是明显的。

9.10 证明图 9-13 的源极跟随器或共漏极(CD)场效应管放大器的小信号等效电路是由图 9-14(b)给出的。

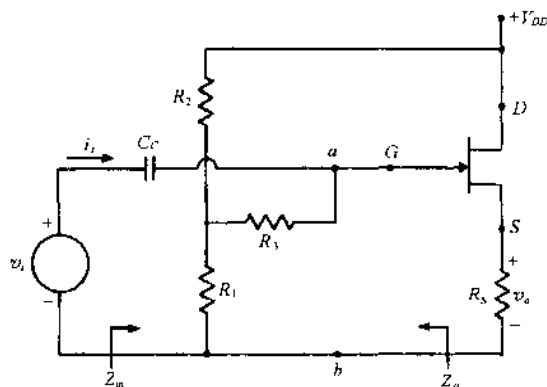


图 9-13

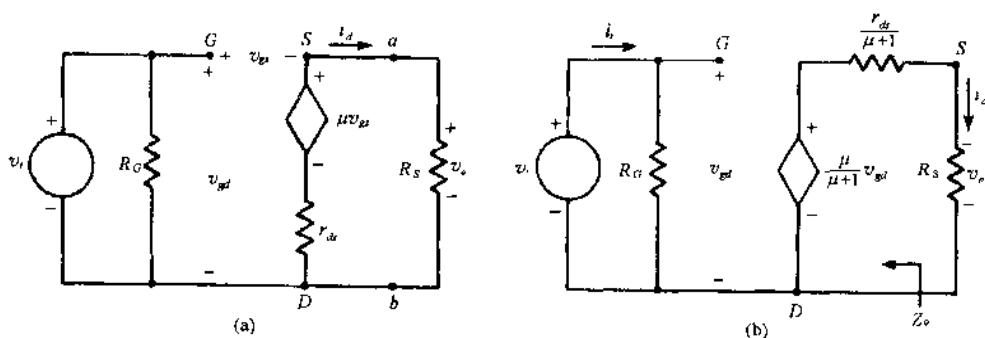


图 9-14

在图 9-13 的交流等效电路中加进了图 9-6(b) 的电压源模型, 重画这个结果给出图 9-14(a) 的电路, 图中  $R_G$  如题 9.9 中那样求出。比  $v_{gs}$  更容易求出的  $v_{gd}$  已标注出来。当图 9-14(a) 中的  $ab$  端点开路时, 环绕源栅漏回路的 KVL 得出

$$v_{gs} = \frac{v_{gd}}{\mu + 1} \quad (1)$$

用(1), 在开路的  $ab$  端点处戴维南电压为

$$v_{th} = \mu v_{gs} = \frac{\mu}{\mu + 1} v_{gd} \quad (2)$$

按照由  $ab$  向左的(当取消即短接  $v_i$  时)激励点阻抗求取戴维南阻抗, 这里以电源  $v_{gs}$  激励的电流  $i_a$  进入端点  $a$ 。由于  $v_{gs} = -v_{as}$ , 环绕图 9-14(a) 输出回路的 KVL 给出

$$v_{as} = \mu v_{gs} + i_a r_{ds} = -\mu v_{as} + i_a r_{ds} \quad (3)$$

由(3), 得

$$R_{th} = \frac{v_{as}}{i_a} = \frac{r_{ds}}{\mu + 1} \quad (4)$$

表达式(2)和(4)直接导致图 9-14(b) 的电路。

**9.11** 图 9-15(a) 是共栅极(CG)JFET 放大器的小信号等效电路(电压源模型)。试用这个电路验证场效应管放大器的两个阻抗和电压反映的法则:

(a) 漏极电路中的电压和阻抗反映到源极电路时除以  $\mu + 1$ 。[以求出由图 9-15(a) 中  $aa'$  向右看的戴维南等效电路并且表示为图 9-15(b) 的结果来验证。]

(b) 源极电路中的电压和阻抗反映到漏极电路时乘以  $\mu + 1$ 。[以求出由图 9-15(a) 中  $bb'$  向左看的戴维南等效电路并且表示为图 9-15(c) 的结果来验证。]

(a) 当  $aa'$  开路时,  $i_d = 0$ ; 因此  $v_{gs} = 0$  而  $v_{th} = 0$ 。将激励点电源( $v_{aa'}$ )连接至  $aa'$  端点之后, 激励电流  $i_a$  进入  $a$  端点, KVL 给出

$$v_{aa'} = \mu v_{gs} + i_a (r_{ds} + R_D) \quad (1)$$

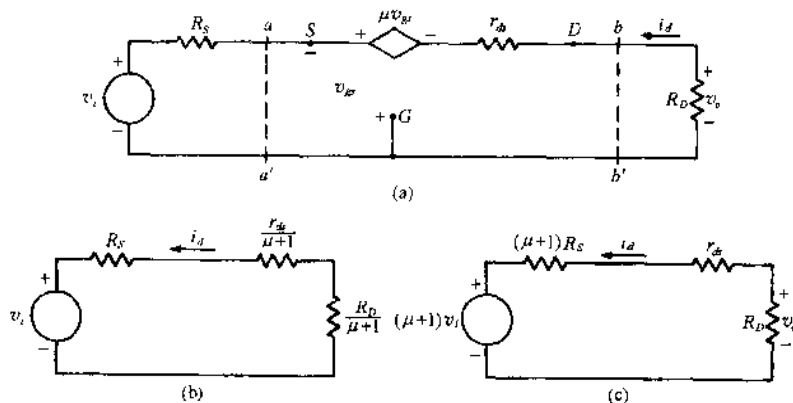


图 9-15

但是  $v_{gs} = -v_{as}$ , 可将其代入(1)以给出

$$R_{th} = \frac{v_{as'}}{i_a} = \frac{r_{ds}}{\mu + 1} + \frac{R_D}{\mu + 1} \quad (2)$$

当  $v_{th} = 0$ , 用以代替图 9-15(a) 中  $aa'$  右边网络的  $R_{th}$  接入, 直接导致图 9-15(b)。

(b) 将 KVL 应用到  $bb'$  开路时图 9-15(a) 的左边, 并注意  $v_i = -v_{gs}$ , 得

$$v_{th} = v_i - \mu v_{gs} = (\mu + 1)v_i \quad (3)$$

取消(短接)  $v_i$ , 将激励点电源( $v_{th}$ ) 连接到  $bb'$  端点以激励电流  $i_b$  进入  $b$  端点, 注意  $v_{gs} = -i_b R_S$ , 并应用环绕图 9-15(a) 回路的 KVL 求出

$$v_{th} = i_b(r_{ds} + R_S) - \mu v_{gs} = i_b[r_{ds} + (\mu + 1)R_S] \quad (4)$$

由(4)求出戴维南阻抗为

$$R_{th} = \frac{v_{th}}{i_b} = r_{ds} + (\mu + 1)R_S \quad (5)$$

用(3)的戴维南电源和(5)的阻抗替换  $bb'$  左边网络的平衡之后, 这个电路就是图 9-15(c)的结果。

**9.12** 对于某类  $n$  沟道 JFET, 制造厂技术条件表有标称的和最差情况的栅极短路参数如下:

	$I_{DSS}, \text{mA}$	$V_{p0}, \text{V}$
最大的	7	4.2
标称的	6	3.6
最小的	5	3.0

试画出标称的和最差情况的转移特性略图, 它可以预期大量的器件样品。

利用式(9.2)可以计算出在  $V_{p0} \leq v_{gs} \leq 0$  范围内标称的、最大的、最小的转移特性的值。图 9-16 中画出了这些结果。

**9.13** 将一个自偏置 JFET 放大器(见图 9-13)设计为  $V_{DSQ} = 15\text{V}$ ,  $V_{DD} = 24\text{V}$ , 使用题 9.12 所描述的器件。无论所使用一批中个别的 JFET 是怎样, 为了控制增益改变, 静态漏极电流都必须满足  $I_{DQ} = 2 \pm 0.4\text{mA}$ 。试确定  $R_S$  和  $R_D$  的适当值。

在图 9-16 的转移特性上确立了各静态点: 当  $I_{DQ} = 2.4\text{mA}$  时的  $Q_{max}$ , 当  $I_{DQ} = 2.0\text{mA}$  时的  $Q_{th}$ , 当  $I_{DQ} = 1.6\text{mA}$  时的  $Q_{min}$ 。通过原点(即选  $V_{GS} = 0$ )和  $Q_{th}$  绘制一条转移偏置线。由于它的斜率是  $-1/R_S$ , 确定源极电阻为

$$R_S = \frac{0 - (-3)}{4 - 0} = 750\Omega$$

应用环绕漏极源极回路的 KVL 并求解  $R_D$ , 得出漏极电阻值为

$$R_D = \frac{V_{DD} - V_{DSQ} - I_{DQ}R_S}{I_{DQ}} = \frac{24 - 15 - 0.002 \times 750}{0.002} = 3.75\text{k}\Omega$$

由于  $Q_{max}$  位于转移偏置线以上而  $Q_{min}$  位于它以下, 因此满足了  $I_{DQ}$  的条件。

**9.14** 一个 JFET 有夹断电压  $V_{p0} = 4\text{V}$  和饱和电流  $I_{DSS} = 10\text{mA}$ 。假定  $V_{DS} > V_{p0}$ 。(a) 如果  $V_{GS} = -2\text{V}$ , 求出漏极电流的值。(b) 如果  $i_D = 7\text{mA}$ , 求出栅极至源极电压的值。

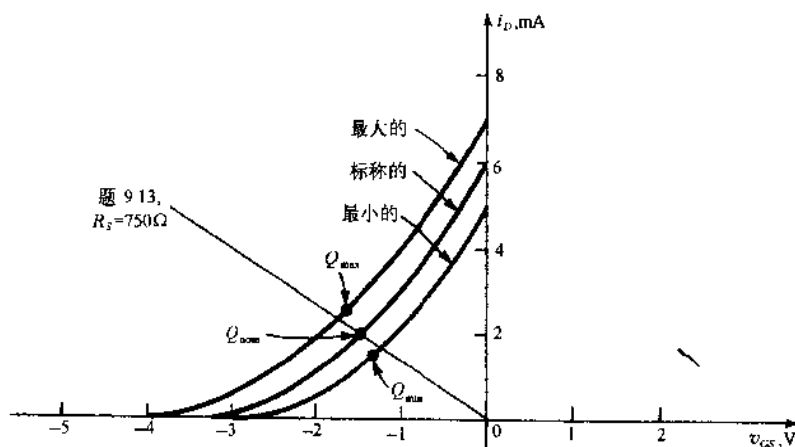


图 9-16

(a) 用式(9.2),

$$i_D = I_{DSS} (1 + v_{GS}/V_{p0})^2 = 10 \times 10^{-3} [1 + (-2)/4]^2 = 2.5 \text{ mA}^{\text{①}}$$

(b) 根据式(9.2),

$$v_{GS} = V_{p0} [(i_D/I_{DSS})^{1/2} - 1] = 4[(7 \times 10^{-3}/10 \times 10^{-3})^{1/2} - 1] = -0.837 \text{ V}$$

9.15 JFET 的栅极短路饱和电流与绝对温度的 3/2 次方成反比, 即

$$I_{DSS} = k_i T^{-3/2} \quad (1)$$

对于在 25℃ 时  $I_{DSS} = 10 \text{ mA}$  的特定 JFET, 试求出 (a) 当为 100℃ 的工作温度时饱和电流的值, (b) 当饱和电流降至 5 mA 时的温度。

(a) 根据(1)构成一个比例, 这里下标 1 和 2 分别表示 25℃ 和 100℃,

$$I_{DSS2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-3/2} I_{DSS1} = \left( \frac{273 + 100}{273 + 25} \right)^{-3/2} (10 \times 10^{-3}) = 7.14 \text{ mA}$$

(b) 再由根据(1)的比例,

$$T_2 = \left( \frac{I_{DSS1}}{I_{DSS2}} \right)^{2/3} T_1 = \left( \frac{10 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}} \right)^{2/3} (273 + 25) = 473 \text{ K} = 200^\circ \text{C}$$

9.16 类似于 BJT 的基极发射极电压, JFET 夹断电压与温度的关系由

$$\Delta V_{p0} = -k_v \Delta T \quad (1)$$

描述。对于一个特定的 JFET, 制造厂技术条件表给出当 25℃ 时  $V_{p0} = 5 \text{ V}$ , 当 0℃ 时  $V_{p0} = 5.05 \text{ V}$ 。(a) 求出这个器件的温度系数  $k_v$ , (b) 预计当这个 JFET 处于 100℃ 时的夹断电压。

(a) 根据(1), 有

$$k_v = \frac{V_{p01} - V_{p02}}{T_1 - T_2} = \frac{5 - 5.05}{(273 + 25) - (273 + 0)} = -2 \text{ mV/}^\circ \text{C}$$

(b) 用(1),

$$V_{p0} = 5 + \Delta V_{p0} = 5 - k_v \Delta T = 5 - (-2 \times 10^{-3})(100 - 25) = 4.85 \text{ V}$$

9.17 对于图 9-17 中串联连接两个相同的 JFET,  $I_{DSS} = 8 \text{ mA}$ ,  $V_{p0} = 4 \text{ V}$ 。如果  $V_{DD} = 15 \text{ V}$ ,  $R_D = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_S = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_G = 1 \text{ M}\Omega$ , 试求 (a)  $V_{DSQ1}$ , (b)  $I_{DQ1}$ 。

(a) 用 KVL,

$$V_{GSQ1} = V_{GSQ2} + V_{DSQ1} \quad (1)$$

但是由于  $I_{DQ1} = I_{DQ2}$ , 由式(9.2)导致

$$I_{DSS} \left( 1 + \frac{V_{GSQ1}}{V_{p0}} \right)^2 = I_{DSS} \left( 1 + \frac{V_{GSQ2}}{V_{p0}} \right)^2$$

① 原著中无平方, 得数为 5 mA。——译者注

即  $V_{GSQ1} = V_{GSQ2}$  (2)

将(2)代入(1)得到  $V_{DSQ1} = 0$ 。

(b)假定可忽略栅极电流,环绕下面栅极源极回路应用 KVL 给出

$V_{GSQ1} = -I_{DQ1}R_S$ 。将这个结果代入(1)并移项得到  $i_{DQ1}$  的二次方程:

$$I_{DQ1}^2 - \left(\frac{V_{p0}}{R_S}\right)^2 \left(\frac{1}{I_{DSS}} + \frac{2R_S}{V_{p0}}\right) I_{DQ1} + \left(\frac{V_{p0}}{R_S}\right)^2 = 0 \quad (3)$$

代入已知量给出

$$I_{DQ1}^2 - 4.5 \times 10^{-3} I_{DQ1} + 4 \times 10^{-6} = 0$$

由此方程得  $I_{DQ1} = 3.28\text{mA}$  和  $1.22\text{mA}$ 。由于  $I_{DQ1} = 3.28\text{mA}$  的值将导致  $V_{GSQ1} < -V_{p0}$ , 即这个值是额外的, 因此  $I_{DQ1} = 1.22\text{mA}$ 。

9.18 对于图 9-17 的放大器, 具有如题 9.17 给出的值, 试求 (a)

$V_{GSQ1}$  和  $V_{GSQ2}$ , (b)  $V_{DSQ2}$ 。

解 (a) 利用题 9.17 的结果,

$$V_{GSQ1} = -I_{DQ1}R_S = -(1.22 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^3) = -2.44\text{V}$$

当为此结果且有题 9.17 的(2),  $V_{GSQ2} = -2.44\text{V}$ 。

(b) 由 KVL 并利用题 9.17 的结果,

$$\begin{aligned} V_{DSQ2} &= V_{DD} - V_{DSQ1} - I_{DQ1}(R_S + R_D) \\ &= 15 - 0 - (1.22 \times 10^{-3})(2 \times 10^3 + 5 \times 10^3) = 6.46\text{V} \end{aligned}$$

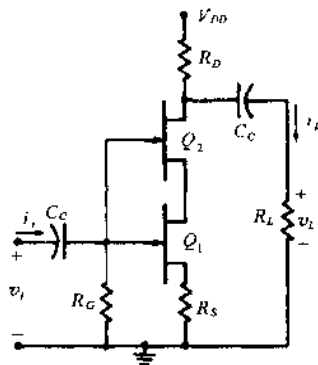


图 9-17

## 补充习题

9.19 对于例 9.1 的 JFET 放大器, 将  $R_1$  改变成  $2\text{M}\Omega$  以增加输入阻抗。如果  $R_D$ 、 $R_S$ 、 $V_{DD}$  都不改变, 为了保持原先的 Q 点, 需要  $R_2$  为何值?

答  $31.33\text{M}\Omega$

9.20 试求出例 9.1 中  $R_S$  的端电压。

答  $3\text{V}$

9.21 如果  $C_C$  是很大的, 试求出例 9.1 从电源  $v_i$  来看的输入阻抗。

答  $940\text{k}\Omega$

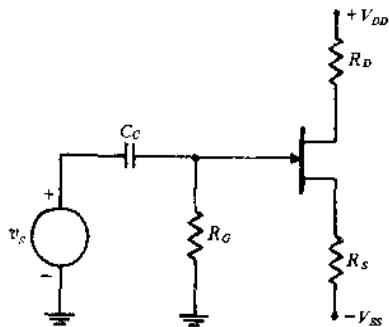


图 9-18

9.22 以图 9-18 举例的电源偏置方法可以使用于 JFET 或 MOSFET。在 JFET 情况下, 具有图 9-4 给出的特性和  $R_D = 1\text{k}\Omega$ 、 $R_S = 4\text{k}\Omega$ 、 $R_G = 10\text{M}\Omega$ , 试确定  $V_{DD}$  和  $V_{SS}$ , 以使这个放大器与例 9.1 的放大器有同样的静态条件。

答  $V_{SS} = 4\text{V}$ ,  $V_{DD} = 16\text{V}$

9.23 证明 JFET 的跨导与漏极电流的平方根成正比。

$$\text{答 } g_m = \frac{2\sqrt{I_{DSS}}}{V_{p0}} \sqrt{i_D}$$

9.24 对于图 9-9(a)漏极反馈偏置放大器,  $V_{DD} = 15\text{V}$ ,  $R_F = 5\text{M}\Omega$ ,  $I_{DQ} = 0.75\text{mA}$ ,  $V_{GSQ} = 4.5\text{V}$ 。试求出 (a)  $V_{DSQ}$  和 (b)  $R_L$ 。

答 (a)  $4.5\text{V}$ ; (b)  $14\text{k}\Omega$

9.25 对于图 9-13 中的放大器, 有  $R_1 = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 100\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 1\text{M}\Omega$ ,  $r_{ds} = 30\text{k}\Omega$ ,  $\mu = 150$  (见题 9.5),  $R_S = 1\text{k}\Omega$ 。试求 (a)  $A_v (= v_o/v_i)$ , (b)  $A_v (= i_d/i_i)$ ①, (c)  $Z_o$ 。

答 (a)  $0.829$ ; (b)  $843$ ; (c)  $198.7\Omega$

9.26 计算图 9-15(a)CG 放大器的电压增益。

$$\text{答 } A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{(\mu+1)R_D}{R_D + r_{ds} + (\mu+1)R_S}$$

9.27 求出图 9-19(a)电路的电压增益  $A_{v2} (= v_2/v_1)$ 。图 9-19(b)是小信号等效电路, 电路中的阻抗反映已经用于化简。

① 原著中为  $i_i/i_d$ 。——译者注

答  $A_{v2} = -\mu R_D / [R_D + r_{ds} + (\mu + 1)R_S]$

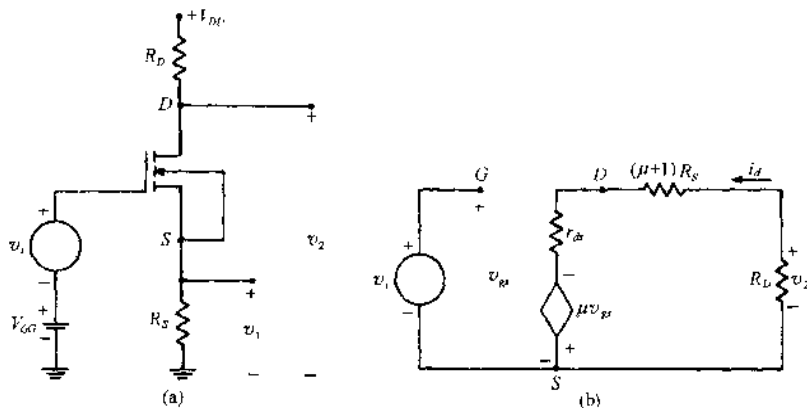


图 9-19

- 9.28 如果图 9-19(a)放大器的  $R_D = R_S$ , 由于  $v_2 = -v_1$  (两个输出在幅度上相等而在相位上相差  $180^\circ$ ), 这个电路通常称为分相器。试求  $A_{v1}$  ( $= v_1/v_i$ ) 并以其与题 9.27 的  $A_{v2}$  的对比来验证这个电路确实是分相器。

答  $A_{v1} = \mu R_S / [R_D + r_{ds} + (\mu + 1)R_S]$

- 9.29 一个按照图 9-3 电路接法的 JFET 放大器是用题 9.12 中所描述的器件制成的。假定其为一个标称器件, 并采用  $V_{DD} = 24V$ ,  $V_{GSQ} = 15V$ ,  $I_{DQ} = 2mA$ ,  $R_1 = 2M\Omega$ ,  $R_2 = 30M\Omega$ 。(a) 试求出放大器中  $R_S$  和  $R_D$  的值。(b) 试预计  $I_{DQ}$  可能的范围。

答 (a)  $R_S = 1.475k\Omega$ ,  $R_D = 3.03k\Omega$ ; (b) 1.8 至 2.2mA

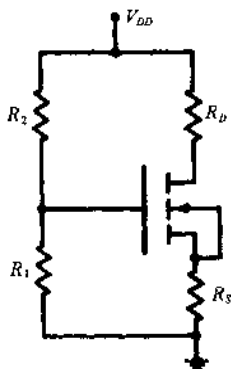


图 9-20

- 9.30 图 9-20 中 n 沟道增强型 MOSFET 的特征是  $V_T = 4V$ ,  $V_{GSon} = 6V$ ,  $I_{Dsat} = 10mA$ 。假定可忽略栅极电流,  $R_1 = 50k\Omega$ ,  $R_2 = 0.4M\Omega$ ,  $R_S = 0$ ,  $R_D = 1k\Omega$ ,  $V_{DD} = 15V$ 。试求  $V_{GSQ}$ 。

答 1.67V

- 9.31 试计算题 9.30 中 MOSFET 放大器的静态值  $I_{DQ}$ 。

答 13.57mA

- 9.32 求题 9.30 放大器的  $V_{DSQ}$  值。

答 1.43V

- 9.33 试求出图 9-21 中并联连接的两个相同 n 沟道 JFET 的等效电路。

答  $V_{GSQ等效} = V_{GSQ}$ ,  $i_{DSS等效} = 2I_{DSS}$

- 9.34 图 9-22 的 n 沟道 JFET 电路使用了一种不同的自偏置方法。假定为可忽略的栅极电流。(a) 试证明如果  $V_{DD} > 0$ , 则  $V_{GSQ} < 0$ , 因而这个器件是正常偏置的。(b) 令  $R_D = 3k\Omega$ ,  $R_S = 1k\Omega$ ,  $V_{DD} = 15V$ ,  $V_{DSQ} = 7V$ 。试求  $I_{DQ}$  和  $V_{GSQ}$ 。

答 (a)  $V_{GSQ} = -I_{DQ}R_S < 0$ ; ① (b)  $I_{DQ} = 2mA$ ,  $V_{GSQ} = -2V$

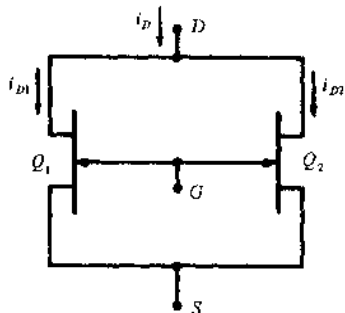


图 9-21

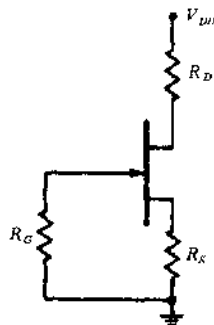


图 9-22

① 原著中没有负号。——译者注



## 10.1 引言

运算放大器(OP Amp)的名称起初是指一种放大器,能够很容易改变其外部电路,在模拟计算机应用中执行一些数学运算,如加法、比例、积分等。然而,随着固态技术的进步,运算放大器已成为高可靠的、小型化的、特性始终可预计的器件,在基本放大、信号调整、有源滤波器、函数发生器、开关电路等方面成为主要的标准元件。

## 10.2 理想运算放大器和实际运算放大器

运算放大器放大的是两个输入信号之间的差  $v_d \equiv v_1 - v_2$  (见图 10-1), 显示的开环电压增益为

$$A_{OL} \equiv \frac{v_o}{v_d} \quad (10.1)$$

标注为负号的 1 端为反相输入端, 输出端将信号  $v_1$  从幅度上放大并颠倒相位。标注为正号的 2 端为同相输入端,  $v_2$  的输出是保持相位的。

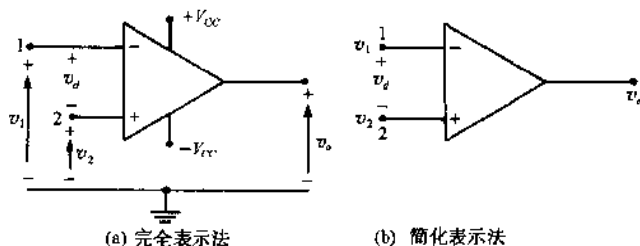


图 10-1 运算放大器

运算放大器的开环电压增益在量级上从  $10^4$  至  $10^7$  不等。运算放大器输出电压的最大幅度称为饱和电压, 这个电压比电源电压小了近似 2V。换言之, 放大器在

$$-(V_{CC} - 2) \text{ (V)} < v_o < (V_{CC} - 2) \text{ (V)} \quad (10.2)$$

范围内是线性的。

理想运算放大器具有三个根本性质, 将其作为评定实际运算放大器优度的标准:

1. 开环电压增益 ( $A_{OL}$ ) 为负无限大。
2. 1 端与 2 端之间的输入阻抗 ( $R_d$ ) 为无限大, 输入电流为零。
3. 输出阻抗为零, 输出电压与负载无关。

**例 10.1** 一个运算放大器具有饱和电压 ( $V_{o\text{sat}}$ ) 10V, 开环电压增益  $-10^5$ , 输入电阻  $100\text{k}\Omega$ 。试求 (a) 刚好激励放大器达到饱和的  $v_d$  值, (b) 当饱和开始时的输入电流。

**解** (a) 用式 (10.1),

$$v_d = \frac{\pm V_{o\text{sat}}}{A_{OL}} = \frac{\pm 10}{-10^5} = \mp 0.1\text{mV}$$

(b) 设  $i_{in}$  是进入图 10-1(b) 1 端的电流, 则

$$i_{in} = \frac{v_d}{R_d} = \frac{\mp 0.1 \times 10^{-3}}{100 \times 10^3} = \mp 1\text{nA}$$

在实用中, 运算放大器要加一个由电路产生的大百分比负反馈来使用, 这使放大器的特性几乎完全取决于外接至这个基本运算放大器的电路元件。在负反馈存在的情况下, 这个基本

运算放大器按理想对待时所引起的误差趋向于减小。

### 10.3 反相放大器

图 10-2 的反相放大器具有连接至地即公共点的同相输入端。通过输入电阻  $R_1$  施加信号, 电流负反馈(见题 10.1)由连接反馈电阻  $R_F$  来完成。

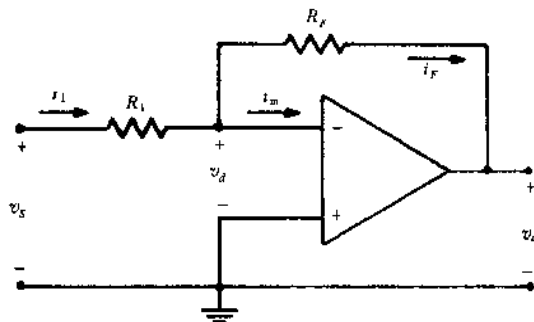


图 10-2 反相放大器

**例 10.2** 对于图 10-2 的反相放大器, 仅用 (a) 理想运算放大器的性质 1, (b) 理想运算放大器的性质 2, 求出电压增益  $v_o/v_s$ 。

**解** (a) 在反相输入端用节点电压法, 电流的平衡为

$$\frac{v_s - v_d}{R_1} + \frac{v_o - v_d}{R_F} = i_m = \frac{v_d}{R_d} \quad (1)$$

式中  $R_d$  是差动输入电阻。由式 (10.1),  $v_d = v_o/A_{dL}$ , 将其代入 (1) 中得

$$\frac{v_s - (v_o/A_{dL})}{R_1} + \frac{v_o - (v_o/A_{dL})}{R_F} = \frac{v_o/R_d}{A_{dL}} \quad (2)$$

在  $A_{dL} \rightarrow \infty$  时, (2) 成为

$$\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_F} = 0 \text{ 即 } A_v \equiv \frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_F}{R_1} \quad (3)$$

(b) 如果  $i_m = 0$ , 则  $v_d = i_m R_d = 0$ <sup>①</sup> 且  $i_1 = i_F = i$ 。输入回路和反馈回路的方程分别是

$$v_s = iR_1 \text{ 和 } v_o = -iR_F$$

由此

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_F}{R_1} \quad (4)$$

与 (3) 一致。

### 10.4 同相放大器

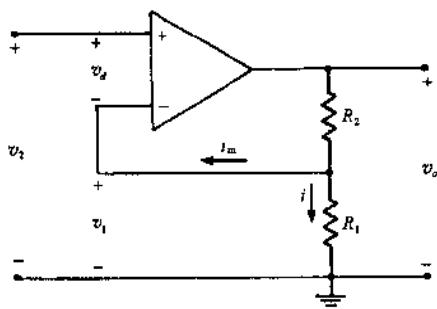


图 10-3 同相放大器

将图 10-2 的  $R_1$  接地并在运算放大器的同相输入端施加输入信号, 就实现了图 10-3 的同相放大器。当  $v_2$  为正时,  $v_o$  为正且电流  $i$  为正。于是电压  $v_1 = iR_1$  施加至反相输入端, 相当于电压负反馈。

**例 10.3** 对于图 10-3 的同相放大器, 假定进入运算放大器反相输入端的电流为零, 使  $v_d \approx 0$  而  $v_1 \approx v_2$ 。试导出电压增益  $v_o/v_2$  的表达式。

**解** 当基本运算放大器的输入电流为零时, 通过  $R_2$  与通过  $R_1$  的电流必定是相同的, 导致

<sup>①</sup> 正是由于  $R_d \rightarrow \infty$ , 才对任意的  $v_d$  推得  $i_m \rightarrow 0$ 。如果反过来再推出  $v_d = 0$  就错了。结论  $A_v \equiv -R_F/R_1$  的正确前提应该是性质 1 或附加  $R_d \neq 0$ 。本题的 (b) 命题是错误的。——译者注

$$\frac{v_o - v_1}{R_2} = \frac{v_1}{R_1}$$

即

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_2} \approx \frac{v_o}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

### 10.5 求和放大器

将并联的输入加至图 10-2 的反相放大器, 就构成图 10-4 的反相求和放大器(又称为反相加法器)。输出是输入的加权和, 但极性是相反的。当为理想运算放大器时, 可用输入的数目没有限制; 但是, 如将这些输入加至实际运算放大器, 增益就会减小(见题 10.18)。

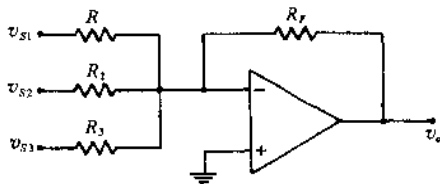


图 10-4 反相求和放大器

**例 10.4** 如果基本运算放大器是理想的, 试求图 10-4 反相求和放大器输出的表达式。

**解** 利用叠加原理。当  $v_{S2} = v_{S3} = 0$  时, 由于反相输入端节点是虚地(见题 10.1),  $R_1$  中的电流不受  $R_2$  和  $R_3$  的影响。因此归因于  $v_{S1}$  的输出电压由例 10.2 的(3)确定为  $v_{o1} = -(R_F/R_1)v_{S1}$ 。类似地,

$$v_{o2} = -(R_F/R_2)v_{S2}, \quad v_{o3} = -(R_F/R_3)v_{S3}$$

于是有

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} + v_{o3} = -R_F \left( \frac{v_{S1}}{R_1} + \frac{v_{S2}}{R_2} + \frac{v_{S3}}{R_3} \right)$$

### 10.6 微分放大器

采用将电容接入运算放大器的输入通道, 可以得到输入信号对时间的微分。图 10-5 的电路示出含一个运算放大器的最简单反相微分器。由于高频干扰能够产生一个导数, 其量值与信号的导数是可比的, 这个电路只有有限的实际用途。在实用中, 低通<sup>①</sup>滤波常用于达到减小干扰的效果(见题 10.7)。

**例 10.5** 如果基本运算放大器是理想的, 试求图 10-5 反相微分器输出的表达式。

**解** 由于运算放大器是理想的,  $v_d \approx 0$  而反相输入端是虚地, 显然  $v_S$  呈现在电容  $C$  两端,

$$i_S = C \frac{dv_S}{dt}$$

但是电容电流也是通过  $R$  的电流( $i_{in} = 0$ ), 故

$$v_o = -i_F R = -i_S R = -RC \frac{dv_S}{dt}$$

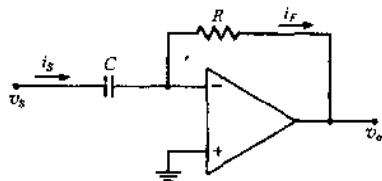


图 10-5 微分放大器

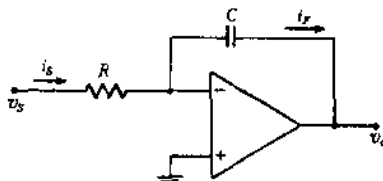


图 10-6 积分放大器

### 10.7 积分放大器

将电容用在运算放大器的反馈通道, 可使输出信号是输入信号的时间积分。图 10-6 给出了一个简单反相积分器的电路接法。

① 原著中为“高通”。——译者注

**例 10.6** 如果运算放大器是理想的,试证明图 10-6 反相积分器的输出实际是输入信号的时间积分。

**解** 由于运算放大器是理想的,所以反相输入端是虚地而  $v_s$  呈现在  $R$  两端,

$$i_s = \frac{v_s}{R}$$

但是由于进入运算放大器的电流可忽略,故通过  $R$  的电流必定也流过  $C$ ,

$$v_o = -\frac{1}{C} \int i_F dt = -\frac{1}{C} \int i_s dt = -\frac{1}{RC} \int v_s dt$$

## 10.8 滤波器应用

随着积分电路的发展,运算放大器在有源滤波器中的运用已经增多。有源滤波器能够减少对笨重电感的需求。另外,有源滤波器不一定像无源元件滤波器那样衰减通带之内的信号。在图 10-7(a)中示出了使用一个作为有源器件的运算放大器的简单反相一阶低通滤波器。

**例 10.7** (a)对于图 10-7(a)中所给出  $s$  域(拉普拉斯变换)表示法的低通滤波器,求出传递函数  $A(s) \equiv V_o(s)/V_s(s)$ 。(b)绘制一条增益幅度的频域曲线,表明这个滤波器使通过低频信号而衰减高频信号。

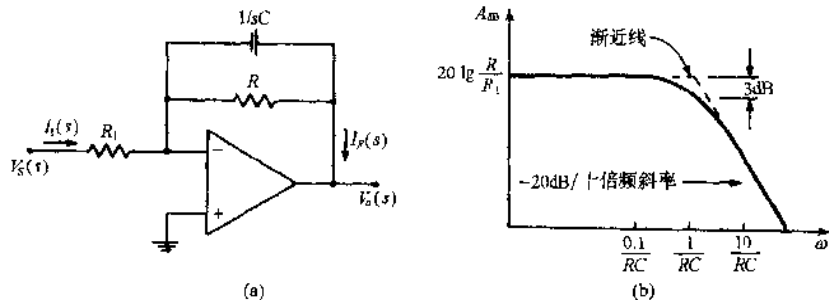


图 10-7 一阶低通滤波器

**解** (a)求出反馈阻抗  $Z_F(s)$ 和输入阻抗  $Z_1(s)$ 为

$$Z_F(s) = \frac{R(1/sC)}{R + (1/sC)} = \frac{R}{sRC + 1}, \quad Z_1(s) = R_1 \quad (1)$$

将例 10.2 的电阻电路分析直接推广到  $s$  域,可得

$$A(s) = -\frac{Z_F(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R/R_1}{sRC + 1} \quad (2)$$

(b)通常绘制以分贝表示的增益幅度对于角频率  $\omega$  的(常用)对数之间的关系曲线。令(2)中的  $s = 0 + j\omega$ ,

$$A_m \equiv 20\lg |A(j\omega)| = 20\lg R/R_1 - 20\lg |j\omega RC + 1| \quad (3)$$

图 10-7(b)显示了(3)的曲线,其中水平分度是对数式的。在低于  $\omega = 0.1/RC$  时,曲线基本上是平的;于是全部低于  $0.1/RC$  的频率以直流增益  $R/R_1$  通过。增益的 3dB 减小出现在“转角频率” $1/RC$  处,并且当频率高于  $10/RC$  时,每十倍的频率改变使增益衰减 20dB。

## 10.9 函数发生器和信号调整器

在模拟系统设计中,经常需要改变信号的增益特性,将信号与一个生成的基准进行比较,或对信号加以限制。这样的电路应用经常可以利用运算放大器的高输入/低输出阻抗和高增益性质来实现。这些电路的可能性是无限制的;不过,最普通的情况是将非线性元件(如二极管或晶体管)接入负反馈递道,而在输入支路使用线性元件。

**例 10.8** 图 10-8 的信号调整放大器改变增益取决于  $v_s$  的极性。如果二极管  $D_2$  是理想的,试求出当  $v_s$  为正时和  $v_s$  为负时电路的电压增益。

**解** 如果  $v_S > 0$ , 则  $v_o < 0$ , 正向偏置的  $D_2$  将显示为短路。等效反馈电阻  $R_{F\text{eq}}$  为

$$R_{F\text{eq}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

用例 10.2 的(3), 得

$$A_v = -\frac{R_{F\text{eq}}}{R_1} = -\frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3)} \quad (1)$$

如果  $v_S < 0$ , 则  $v_o > 0$ , 反向偏置的  $D_2$  将显示为开路。

等效反馈电阻则为  $R_{F\text{eq}} = R_3$ , 则

$$A_v = -\frac{R_{F\text{eq}}}{R_1} = -\frac{R_3}{R_1} \quad (2)$$

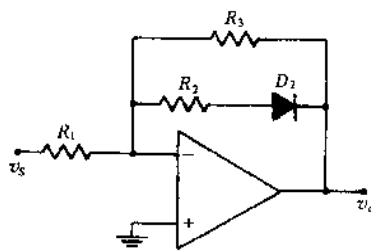


图 10-8

### 例题解答

**10.1** 对于图 10-2 的反相放大器, (a) 证明如  $A_{OL} \rightarrow -\infty$ , 则  $v_d \rightarrow 0$ , 反相输入端保持接近于地电位(称为虚地)。(b) 证明这个电流反馈是负反馈。

**解** (a) 环绕输出回路应用 KVL, 得

$$v_S - v_o = i_1 R_1 + i_F R_F \quad (1)$$

在(1)中用式(10.1), 移项, 并取极限得

$$v_d = \lim_{A_{OL} \rightarrow -\infty} \left[ \frac{i_1 R_1 + i_F R_F - v_S}{A_{OL}} \right] = 0 \quad (2)$$

(b) 对负反馈的判断是  $i_F$  抵消  $i_1$ , 即这两个电流必须有相同的代数符号。应用两个 KVL, 且有  $v_d \approx 0$ , 可得

$$i_1 = \frac{v_S - v_d}{R_1} \approx \frac{v_S}{R_1}, \quad i_F = \frac{-v_o + v_d}{R_F} \approx \frac{-v_o}{R_F}$$

但是, 在反相放大器中  $v_o$  与  $v_S$  有相反的符号, 所以  $i_1$  与  $i_F$  有同样的符号。

**10.2** (a) 利用例 10.2 的(2)推导出实际反相运算放大器增益的精确公式。(b) 若  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_F = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_d = 1\text{k}\Omega$ ,  $A_{OL} = -10^4$ , 计算这个反相放大器的增益。(c) 将(b)的结果与例 10.2 的(3)所给出理想运算放大器近似值进行比较。

**解** (a) 求解例 10.2 的(2)给出电压增益比

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_S} = \frac{A_{OL}}{1 + \frac{R_1}{R_F}(1 - A_{OL}) + \frac{R_1}{R_d}} \quad (1)$$

(b) 计算(1),

$$A_v = \frac{-10^4}{1 + \frac{1}{10}(1 + 10^4) + \frac{1}{1}} = -9.979 \quad (2)$$

(c)

$$A_{v\text{理想}} = -\frac{R_F}{R_1} = -10$$

百分比误差为

$$\frac{-9.979 - (-10)}{-9.979} \times 100\% = -0.21\%$$

$R_d$  和  $A_{OL}$  与理想相差甚远, 但误差仍是很小的。

**10.3** 差动放大器(有时称为减法器)响应两个信号之差, 在称之为共模抑制的作用中消除输入信号中任何相同的部分(经常是偏移或干扰)。试求图 10-9 中  $v_o$  的表达式以证明这个电路是差动放大器。(假定为理想运算放大器)

**解** 由于进入理想运算放大器的电流是零, 回路方程给出

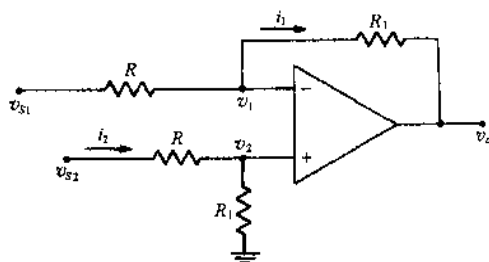


图 10-9 差动放大器

$$v_1 = v_{s1} - R i_1 = v_{s1} - R \left( \frac{v_{s1} - v_o}{R + R_1} \right)$$

在同相输入端节点用电压分配,

$$v_2 = \frac{R_1}{R + R_1} v_{s2}$$

对于理想运算放大器,  $v_d = 0$  或  $v_1 = v_2$ , 这导出

$$v_o = \frac{R_1}{R} (v_{s1} - v_{s2})$$

于是可知, 输出电压是直接输入电压之差成比例的。

#### 10.4 如果基本运算放大器是理想的, 试求图 10-2 反相放大器的输入阻抗 ( $Z_1$ )。

设想  $v_s$  为激励点电源。由于运算放大器是理想的, 因而反相输入端是虚地, 输入处的回路方程导出

$$v_s = i_1 R_1 + 0, \quad \text{即} \quad Z_1 = \frac{v_s}{i_1} = R_1$$

#### 10.5 图 10-10 的单位跟随放大器具有为 1 的电压增益, 且输出是与输入同相位的。它还具有极高的输入阻抗, 导致将其用作中间级(缓冲)放大器以防止小的负载阻抗加载于一个源。假定具有 $A_{OL} = -10^6$ (典型值) 的实际运算放大器。(a) 证明 $v_o \approx v_s$ 。(b) 求出这个放大器输入阻抗的表达式, 并计算当 $R_d = 1\text{M}\Omega$ (典型值) 时输入阻抗的值。

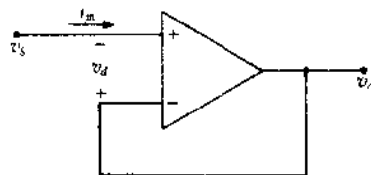


图 10-10 单位跟随器

(a) 写出回路方程并利用式(10.1),

$$v_s = v_o - v_d = v_o \left( 1 - \frac{1}{A_{OL}} \right)$$

即

$$v_o = \frac{v_s}{1 - (1/A_{OL})} = \frac{v_s}{1 + 10^{-6}} = 0.999999 v_s \approx v_s$$

(b) 设  $v_s$  为激励点电源并利用式(10.1),

$$v_s = i_m R_d + v_o = i_m R_d - A_{OL} v_d = i_m R_d (1 - A_{OL})$$

即

$$Z_m = \frac{v_s}{i_m} = R_d (1 - A_{OL}) \approx -A_{OL} R_d = -(-10^6 \times 10^6) = 1\text{T}\Omega$$

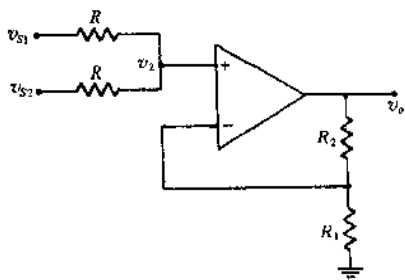


图 10-11

类似地, 当  $v_{s1} = 0$  时,

总输出为

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) (v_{s1} + v_{s2}) \quad (4)$$

由此看出这个电路是同相加法器。

#### 10.6 试求出图 10-11 放大器电路输出 ( $v_o$ ) 的表达式。

假定为理想的基本运算放大器。问这个电路执行什么数学运算?

对这个线性电路, 叠加原理是可用的。当  $v_{s2} = 0$  (短接) 时, 用电压分配求出呈现在同相输入端的电压为

$$v_2 = \frac{R}{R + R} v_{s1} = \frac{v_{s1}}{2} \quad (1)$$

令  $v_{o1}$  是当  $v_{s2} = 0$  时  $v_o$  的值, 用例 10.3 的结果和(1),

$$v_{o1} = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_2 = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{v_{s1}}{2} \quad (2)$$

$$v_{o2} = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{v_{s2}}{2} \quad (3)$$

10.7 图 10-12(a)的电路(以  $s$  域表示的)是比图 10-5 的电路更实用的微分器,因为它会衰减掉高频干扰。(a)试求出联系  $V_o$  与  $V_s$  的  $s$  域传递函数。(b)绘制增益幅度曲线略图,说明减弱了多高频率的干扰效果。

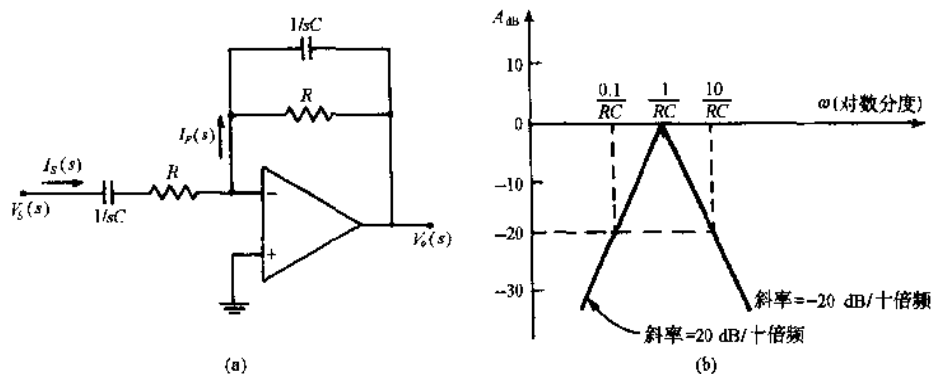


图 10-12

(a) 假定为理想运算放大器而反相输入端是虚地且  $I_s(s) = -I_F(s)$ 。如同例 10.7 中,

$$Z_F(s) = \frac{R}{sRC + 1}$$

而

$$I_F(s) = \frac{V_o(s)}{Z_F(s)} = \frac{sRC + 1}{R} V_o(s)$$

但

$$V_s(s) = I_s(s) Z_{in}(s) = -I_F(s) Z_{in}(s) = -\left[ \frac{sRC + 1}{R} V_o(s) \right] \frac{sRC + 1}{sC}$$

因此

$$A(s) \equiv \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = -\frac{sRC}{(sRC + 1)^2}$$

(b) 由(a),

$$\begin{aligned} A_{db} &\equiv 20 \lg |A(j\omega)| = 20 \lg \omega RC - 40 \lg |j\omega RC + 1| \\ &\approx \begin{cases} 20 \lg \omega RC & (\omega RC < 1) \\ -20 \lg \omega RC & (\omega RC > 1) \end{cases} \end{aligned}$$

图 10-12(b)是这个  $A_{db}$  近似(渐近)表达式的曲线。对于准确的积分器,

$$v_o = K \frac{dv_s}{dt} \text{ 或 } V_o = s K V_s$$

此式导出  $A_{db} = 20 \lg \omega K$ 。于是可以看出,这个电路确实是对低于“转折频率” $f_1 \equiv 1/2\pi RC$  (Hz)的信号分量取导数。高于转折频率的频谱分量将被衰减——频率越高衰减越大。

10.8 在模拟信号处理中,要求经常采用电平箝位(线性放大直到一个预定的输出电平即输出值后输出不再随输入增大进一步增大)。图 10-13(a)中示出了一个这样的电路,在负反馈通道中用串联齐纳二极管。假定理想的齐纳管和运算放大器,试求出  $v_o$  与  $v_s$  之间的关系,在转移特性上绘出这个结果的略图。

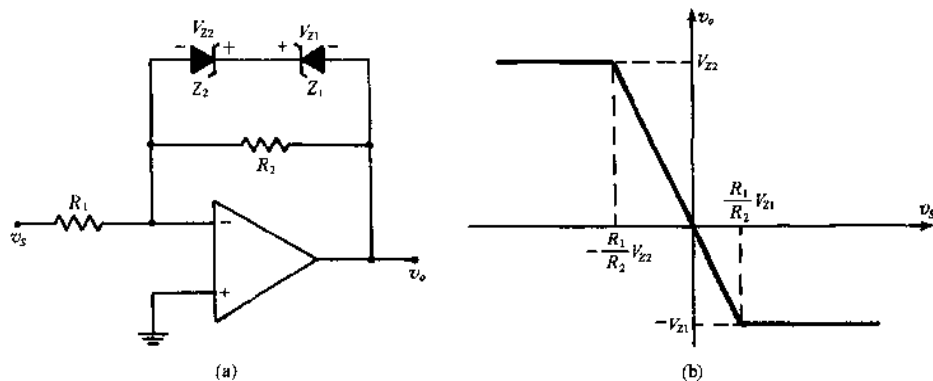


图 10-13

由于运算放大器是理想的,而反相输入端是虚地且  $v_o$  呈现在并联连接的反馈通道上。

**情况一:**  $v_s > 0$ 。当  $v_o < 0$  时,  $Z_2$  为正向偏置而  $Z_1$  为反向偏置。直到  $v_o = -V_{Z1}$  之前齐纳管反馈通道为开路;然后  $Z_1$  将限制  $v_o$  于  $-V_{Z1}$  使之不可能进一步负偏移。

**情况二:**  $v_s < 0$ 。当  $v_o > 0$  时,  $Z_1$  为正向偏置而  $Z_2$  为反向偏置。直到  $v_o$  升至  $V_{Z2}$ , 齐纳管反馈通道相当于开路,在这一点  $Z_2$  限制  $v_o$  成  $V_{Z2}$  值。总起来,

$$v_o = \begin{cases} V_{Z2} & \left( v_s < -\frac{R_1}{R_2} V_{Z2} \right) \\ -\frac{R_2}{R_1} v_s & \left( -\frac{R_1}{R_2} V_{Z2} \leq v_s \leq \frac{R_1}{R_2} V_{Z1} \right) \\ -V_{Z1} & \left( v_s > \frac{R_1}{R_2} V_{Z1} \right) \end{cases}$$

图 10-13(b)给出这个转移特性。

**10.9** 图 10-14 的电路是一个可调输出稳压器。假定基本运算放大器是理想的。如果  $i_z \geq 0.1I_z$  时维持齐纳管的稳压(7.9 节)。(a) 试求出以  $V_Z$  表示的稳压输出。(b) 已知特定的齐纳二极管和  $R_s$ 、 $R_1$  的值,在其中为无损稳压时  $V_s$  的范围是什么?

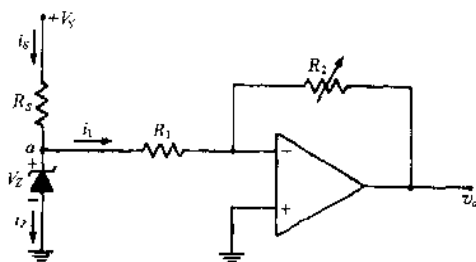


图 10-14

(a) 由于  $V_Z$  是节点  $a$  的电压, 所以例 10.2 的(3)给出

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} V_Z$$

只要  $i_z \geq 0.1I_z$ , 就可以用  $R_1$  调节  $v_o$  的稳压值。

(b) 如果

$$0.1I_z \leq i_s - i_1 \leq I_z \quad \text{即} \quad 0.1I_z \leq \frac{V_s - V_Z}{R_s} - \frac{V_Z}{R_1} \leq I_z$$

$$\text{即} \quad 0.1I_z R_s + \left(1 + \frac{R_s}{R_1}\right) V_Z \leq V_s \leq I_z R_s + \left(1 + \frac{R_s}{R_1}\right) V_Z$$

就维持稳压且二极管电流  $i_z = i_s - i_1$  不超过额定值( $I_z$ )。

**10.10** 图 10-15(a) 的电路是一个限制器, 它减低信号增益至某个限制水平, 而不是题 10.8 电路的施加陡然箝位作用。(a) 求出  $v_o$  的限制值  $V_l$ , 其时二极管  $D$  正向偏置, 于是建立起通过  $R_3$  的第二条反馈通道。假定为理想的运算放大器和以图 7-4(a) 表征的二极管。(b) 求出  $v_o$  与  $v_s$  之间的关系, 并绘制转移特性的略图。

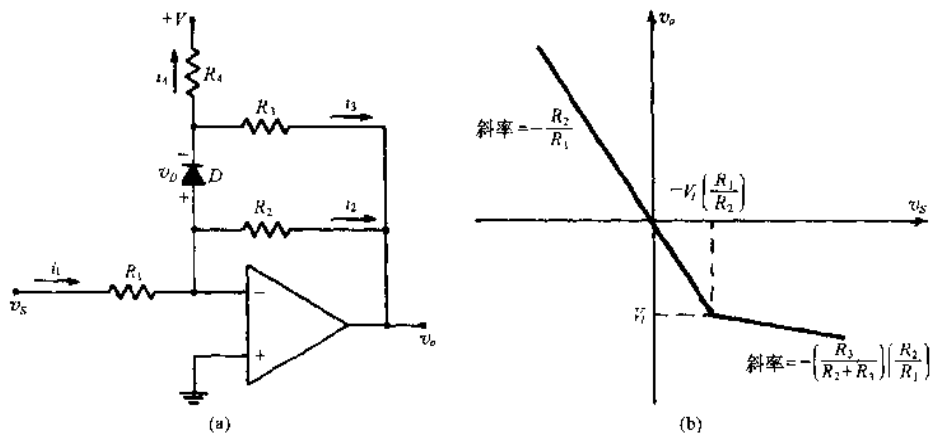


图 10-15



(a) 写出回路方程求二极管电压  $v_D$ 。由于反相输入端是虚地, 而  $v_o$  呈现于  $R_2$  两端, 得

$$v_D = v_o + i_3 R_3 = -v_o - \left( \frac{V - v_o}{R_3 + R_4} \right) R_3 \quad (1)$$

当  $v_D = 0$  时  $v_o = V_I$ , 且(1)给出

$$V_I = -\frac{R_3}{R_4} V \quad (2)$$

(b) 当  $v_o > V_I$  时, 二极管阻断而  $R_2$  构成仅有的反馈通道。由  $i_1 = i_2$ ,

$$\frac{v_S}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2} \quad (3)$$

当  $v_o \leq V_I$  时, 二极管导通而  $R_2$  与  $R_3$  的并联组合构成反馈通道。由  $i_1 = i_2 = i_3 + i_4$ ,

$$\frac{v_S}{R_1} = -\left( \frac{v_o}{R_2} + \frac{v_o}{R_3} + \frac{V}{R_4} \right) \quad (4)$$

由(2)、(3)、(4)得到

$$v_o = \begin{cases} -\frac{R_2}{R_1} v_S & (v_o > V_I) \\ \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \left( \frac{R_2}{R_1} \right) v_S + \frac{R_2}{R_2 + R_3} V_I & (v_o \leq V_I) \end{cases}$$

图 10-15(b)画出了这个转移特性。

- 10.11** 如果  $v_S = 0.02 \sin \omega t$  (V), 在怎样的变更和规定之下, 图 10-13(a)的电路将成为一个 3V 方波发生器? 绘制电路转移特性和输入波形、输出波形的略图。

以去掉  $R_2$  变更图 10-13(a)的电路。规定两个齐纳二极管的  $V_{Z1} = V_{Z2} = 3V$ 。图 10-13(b)的转移特性就变成图 10-16(a)的转移特性。在图 10-16(b)中绘制了所得到  $v_S$  与  $v_o$  之间的关系。

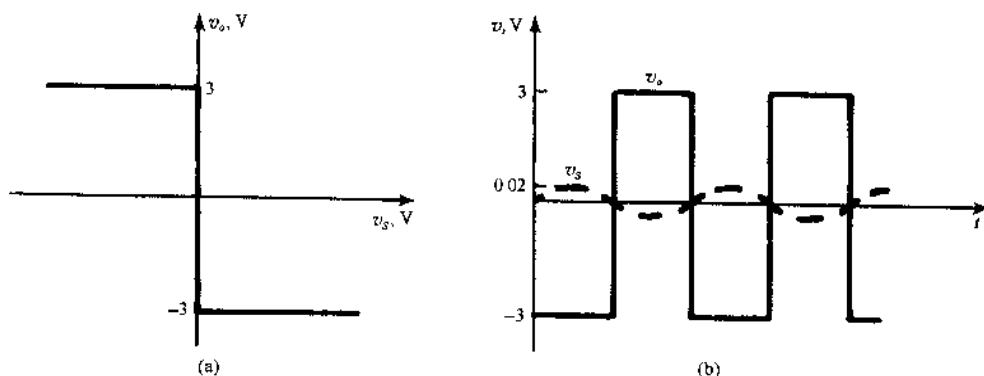


图 10-16

- 10.12** 设计一个具有直流幅度增益为 2 和输入阻抗为  $5k\Omega$  的一阶低通滤波器。直到 100Hz 的增益应是平的。

滤波器如图 10-7 中所示。当为理想运算放大器时, 题 10.4 给出  $Z_{in} = R_1 = 5k\Omega$ 。例 10.7 给出了直流增益为

$$A(0) = -\frac{R}{R_1}$$

因此  $R = 2R_1 = 10k\Omega$ 。由图 10-7(b)看出增益幅度直到  $\omega = 0.1/RC$  是平的, 即必须设定电容使

$$C = \frac{0.1}{2\pi f R} = \frac{0.1}{2\pi \times 100 \times (10 \times 10^3)} = 15.9nF$$

- 10.13** 模拟计算器使用运算放大器来求解微分方程。试设计一个对于图 10-17(a)电路中  $i(t)$ ,  $t > 0$  的模拟解法。假如你现有可用的具有单位增益 ( $R_1 C_1 = 1$ ) 的反相积分器、反相放大器、可变直流电源、开关。

当  $t > 0$  时, 可以写出图 10-17(a)电路的基本微分方程为

$$-\frac{di}{dt} = -\frac{V_o}{L} + \frac{R}{L} i \quad (1)$$

(1) 右端的和可以用图 10-17(b) 左边的反相加法器模拟, 其中  $v_{o1} = -di/dt$ , 选择  $R_2$  和  $R_3$  使

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R}{L}$$

于是

$$v_{o2} = -\int v_{o1} dt$$

将是以每伏特为 1A 的比例下  $i(t)$  的模拟。

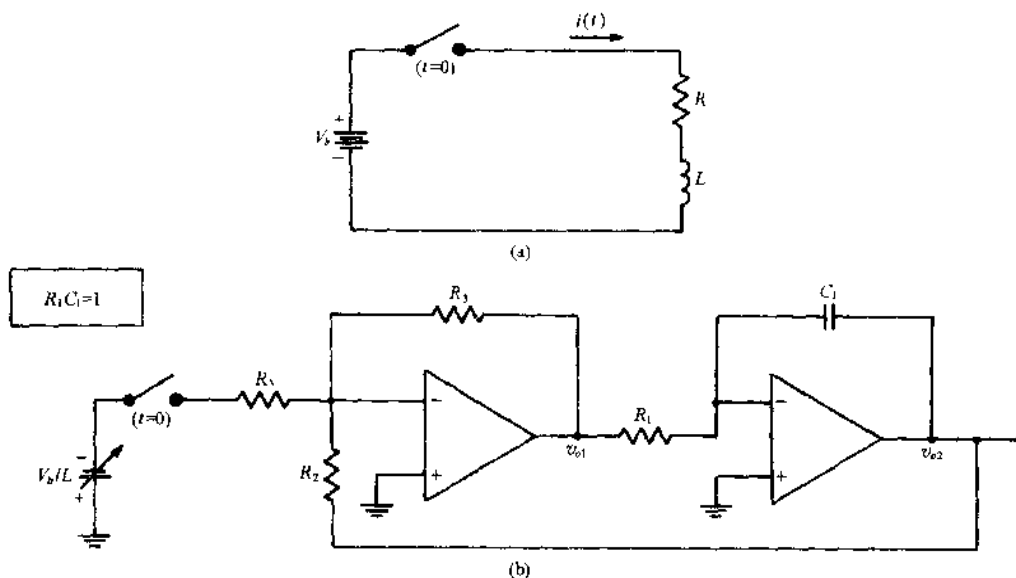


图 10-17

10.14 对于图 10-18 的运算放大器电路, 试确定  $i_L = -v_S/R$  ①由此证明这个电路是一个电压电流变换器。

画出输入电流为

$$i_S = \frac{v_S - v_o}{R + R} = \frac{v_S - v_o}{2R} \quad (1)$$

由电流分配求出电流  $i_L$  为

$$i_L = \frac{v_o}{R + R // R_L} \frac{R}{R + R_L} = \frac{v_o}{R + 2R_L} \quad (2)$$

因为  $v_d = 0$ , 由 KVL 并用(1)和(2)得

$$v_S = i_S R + i_L R_L = \left( \frac{v_S - v_o}{2R} \right) R + \left( \frac{v_o}{R + 2R_L} \right) R_L$$

$$i_L = -v_S/R \quad (3)$$

10.15 求出图 10-18 电压电流变换器的输入阻抗  $Z_m$ 。

由于  $v_d = 0$ ,

$$i_S = \frac{v_S - v_L}{R} \quad (1)$$

而用欧姆定律和题 10.14 的(3),

$$v_L = i_L R_L = - \left( \frac{v_S}{R} \right) R_L = -v_S \frac{R_L}{R} \quad (2)$$

将(2)代入(1)并整理,

$$Z_m = \frac{v_S}{i_S} = \frac{R^2}{R + R_L} \quad (3)$$

① 原著中为  $-v_S/R_L$ ; ② 原著中为  $-(v_S/R_L)R_L = -v_S$ ; ③ 原著中为  $R/2$  ——译者注

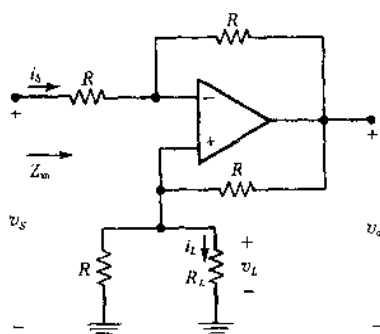


图 10-18

消去  $v_o$  并整理后,

- 10.16 对于图 10-19 的运算放大器电路,证明电流  $i_L$  与  $R_L$  的值无关,因此构成了一个电压控制电流源。

由于运算放大器反相输入端吸收了可忽略的电流,

$$\frac{v_1}{R} = i_1 = i_F = -\frac{v_o}{100R} \quad (1)$$

$$\text{即} \quad v_o = -100v_1 \quad (2)$$

然后用欧姆定律

$$i_o = \frac{v_o}{R} = -\frac{100v_1}{R} \quad (3)$$

在输出节点应用 KCL, 并用(1)和(3),

$$i_L = i_F - i_o = \frac{v_1}{R} - \frac{-100v_1}{R} = \frac{101v_1}{R} \quad (4)$$

- 10.17 试求出图 10-20 运算放大器电路的总增益  $A_v = v_{o2}/v_1$ 。

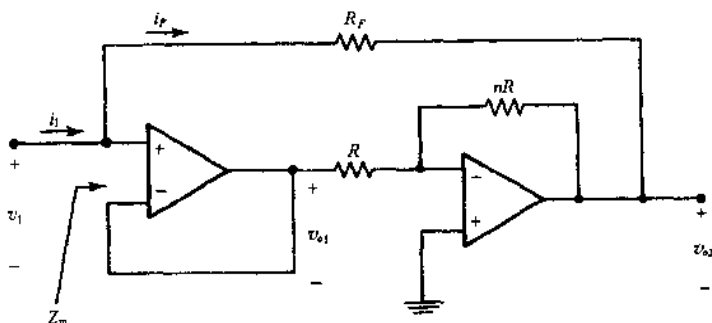


图 10-20

由于第一级是单位跟随器(见题 10.5),

$$v_{o1} = v_1 \quad (1)$$

第二级是反相放大器(见例 10.2),

$$v_{o2} = -\frac{nR}{R}v_{o1} = -nv_{o1} \quad (2)$$

将(1)代入(2)求出

$$A_v = \frac{v_{o2}}{v_1} = -n \quad (3)$$

- 10.18 求出图 10-21 运算放大器电路的增益  $A_v$

$= v_o/v_s$ 。

由于运算放大器的反相输入端吸收了可忽略的电流并且是虚地,

$$\frac{v_A - v_s}{R_1} = -\frac{v_o}{R_3} \quad \text{即} \quad v_A = -\frac{R_2}{R_3}v_o \quad (1)$$

用节点电压方法,

$$\frac{v_A - v_s}{R_1} + \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A - v_o}{R_4} = 0 \quad (2)$$

将(1)代入(2)并移项求出

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_3R_4}{R_4(R_1 + R_2) + R_1(R_2 + R_3)} \quad (3)$$

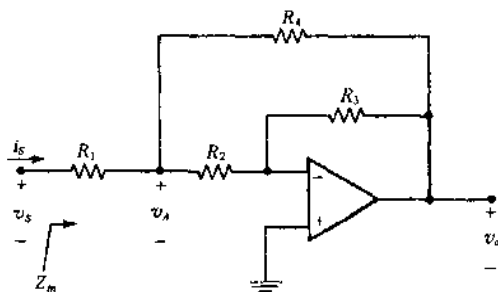


图 10-21

## 补充习题

- 10.19 对于图 10-3 的同相放大器, (a) 求出电压增益比的精确表达式, (b) 计算当  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_d = 1\text{k}\Omega$ ,  $A_{OL} = -10^4$  时的增益比。 (c) 将 (b) 的结果与用例 10.3 中所导出理想运算放大器表达式求出的值进行比较。

答 (a)  $A_v = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - \frac{R_1 R_2}{A_{OL} R_d} - \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}}$ ; (b) 10.977; (c)  $A_{v, \text{理想}} = 11$  即 0.21% 误差

- 10.20 关于例 10.7 一阶低通滤波器,  $R = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 0.1\mu\text{F}$ 。试求 (a) 直流信号的增益, (b) 增益降低 3dB 处的转角即转折频率 ( $f_1$ ), (c) 增益降至一单位处的频率 ( $f_u$ ) (称为单位增益带宽)。

答 (a) -10; (b) 159.2Hz; (c) 1583.6Hz

- 10.21 若基本运算放大器是理想的, 图 10-3 的同相放大器电路就有无限大的输入阻抗。若运算放大器不是理想的, 而是  $R_d = 1\text{M}\Omega$ ,  $A_{OL} = -10^6$ , 试求输入阻抗。令  $R_2 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ 。

答  $1\text{T}\Omega$

- 10.22 令图 10-4 反相求和放大器中的  $R_1 = R_2 = R_3 = 3R_F$ 。这个电路执行什么数学运算?

答 负的瞬时平均值

- 10.23 某一反相求和器 (见图 10-4) 有  $n$  个输入且  $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_n = R$ 。假定基本运算放大器开环增益 ( $A_{OL}$ ) 是有限的, 但反相端输入电流可以忽略。试导出一个关系, 表明当多输入存在之下, 增益幅度是怎样降低的。

答  $A_n \equiv \frac{v_o}{v_{S1} + v_{S2} + \dots + v_{Sn}} = - \frac{R_F/R}{1 - \left( \frac{nR_F}{R} + 1 \right) \frac{1}{A_{OL}}} \quad \text{①}$

当单一输入  $v_{S1}$  时增益为  $A_1$ 。当同样输入  $v_{S1}$  与另外  $(n-1)$  个零输入  $v_{S2} = \dots = v_{Sn} = 0$  时则增益为  $A_n$ 。但因  $A_{OL} < 0$ , 则当  $n > 1$  时  $|A_n| < |A_1|$ 。

- 10.24 如果图 10-22 中的基本运算放大器是理想的, 试求出  $v_o$  并确定这个放大器电路所执行的数学运算。

答  $v_o = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) (v_{S2} - v_{S1}) \quad \text{②} \quad \text{(减法器)}$

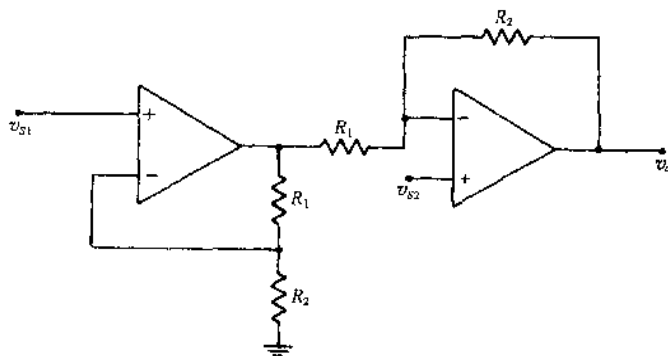


图 10-22

- 10.25 试描述图 10-13(a) 电平箝位电路如果二极管  $Z_2$  被短接时的转移特性。

答 令图 10-13(b) 中的  $V_{Z2} = 0^{\text{③}}$ 。

- 10.26 如果运算放大器和二极管都是理想的, 试求图 10-23 反相放大器的增益。

①原著中为  $a_n \equiv \frac{v_o}{v_{S1} + v_{S2} + \dots + v_{Sn}} = - \frac{R_F/R}{1 - \frac{nR_F}{(R-1)A_{OL}}}$ ;

②原著中为  $v_o = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} (v_{S2} - v_{S1}) \right)$ ;

③原著中为  $V_{Z2} \rightarrow \infty$ 。——译者注

答  $A_v = \begin{cases} -R_2/R_1 & (v_S > 0) \\ -R_3/R_1 & (v_S \leq 0) \end{cases}$

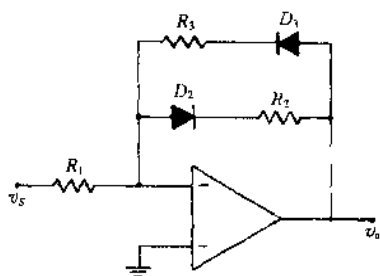


图 10-23

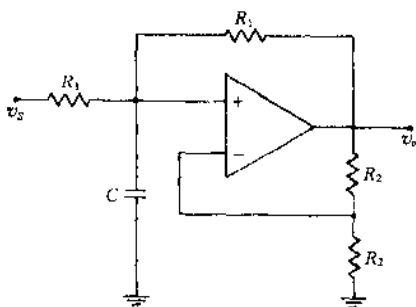


图 10-24

- 10.27 如果图 10-24 中电路的运算放大器是理想的, 试求以  $v_S$  表示的  $v_o$  表达式并表明这个电路的功能。

答  $v_o = \frac{2}{R_1 C} \int v_S dt$  (同相积分器)

- 10.28 如果图 10-25 电路的非理想运算放大器具有开环增益  $A_{OL} = -10^4$ , 试求  $v_o$ 。

答  $0.9999E_i$

- 10.29 怎样才能将题 10.11 的方波发生器用于做成一个三角波发生器?

答 将图 10-6 的积分器级联至这个方波发生器的输出。

- 10.30 描述模拟方程  $3v_1 + 2v_2 + v_3 = v_o$  的运算放大器电路。

答 以具有  $R_F/R_1 = 3, R_F/R_2 = 2, R_F/R_3 = 1$  的图 10-4 求和器级联至具有  $R_F/R_1 = 1$  的图 10-2 反相放大器。

- 10.31 图 10-26 的电路(称为回转器)可以在有源 RC 滤波器设计中用于模拟电感。假定为理想的运算放大器, 试求出 (a)  $s$  域的输入阻抗  $Z(s)$ ; (b)  $C = 10\text{nF}, R_1 = 20\text{k}\Omega, R_2 = 100\text{k}\Omega, R_3 = R_4 = 10\text{k}\Omega$  时模拟电感的等效值。

答 (a)  $Z(s) = sR_1R_2R_3C/R_4$ ; (b)  $2\text{H}$

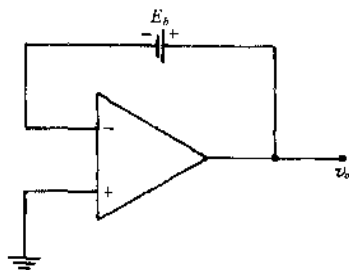


图 10-25

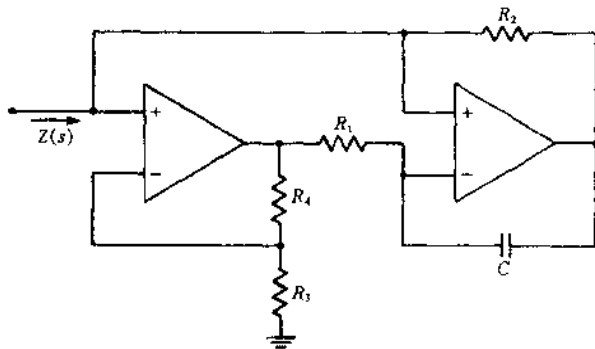


图 10-26

- 10.32 试求出图 10-18 运算放大器电路的电压增益。

答  $A_v = \frac{v_o}{v_S} = -(R + 2R_L)/R$

- 10.33 试求出图 10-19 电路中运算放大器的输出电压  $v_o$ 。

答  $v_o = v_n - i_L R_L = -100v_1 - \frac{101v_1 R_L}{R} = -\left(100 + 101 \frac{R_L}{R}\right)v_1$

- 10.34 试求出图 10-20 中放大器的  $Z_m$  表达式。

答  $Z_m = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_1}{(n+1)v_1/R_F} = \frac{R_F}{n+1}$

10.35 试求出图 10-21 中运算放大器电路的输入阻抗。

答 
$$Z_{in} = \frac{v_S}{i_S} = -\frac{R_1}{1 + \frac{R_2}{R_3} A_v}$$

10.36 试证明图 10-27 电路的  $I_o = -(1 + R_1/R_2)I_i$ , 由此这个电路是实际的电流放大器。

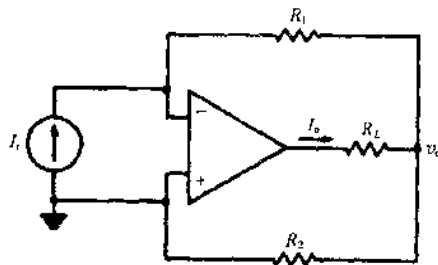


图 10-27

## 第 11 章 开关逻辑和开关电路

### 11.1 二进制函数

为了达到精度上的高可靠性,电子数字系统中的信号仅有两个不连续的值(0 或 1,高或低),由此信号是二进制变量。双稳态开关电路的因动关系局限于最少的可能状态。显然,以列表的形式表示一个或更多的二进制输入自变量与二进制输出因变量之间的函数关系(称为真值表)是很方便的。

单一输入信号  $A$  (自变量)用双稳态开关电路提供输出  $x = b_1(A)$ ,其结果仅存在两种可能情况:

情况一:  $x = b_{11}(A) = A$ ,即信号保持它进入电路时原有的状态(这个电路称做缓冲器)。

情况二:  $x = b_{12}(A) = \bar{A}$  (读作  $A$  非或  $A$  补),即信号以同它进入双稳态开关电路时反相的状态离开这个电路。将这样的电路称做倒相器。表 11-1 和表 11-2 分别表示了缓冲器和倒相器的真值表。

表 11-1  $x = b_{11}(A)$

$A$	$x$
0	0
1	1

表 11-2  $x = b_{12}(A)$

$A$	$x$
0	1
1	0

更为常用的双稳态电路是处理两个输入二进制变量( $A$  和  $B$ )以产生单一的二进制输出  $x = b_2(A, B)$ 。由于有两个输入,其中每个可以是两种状态之一,因而存在  $2^2 = 4$  种由输入变量形成输出的可能组合。

参看表 11-3,按每个二输入一输出二进制逻辑电路(逻辑门),存在四种可能的输出。由于每个  $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$  存在两种可能的状态,因而总共  $2^4 = 16$  种可能的输出组合是可能的。这十六种可能的逻辑电路输出中仅有六种得到了有效的利用:

表 11-3  $x = b_2(A, B)$

$A$	$B$	$x$
0	0	$x_1$
0	1	$x_2$
1	0	$x_3$
1	1	$x_4$

1. “与”门。用表 11-4 给出了真值表,其中当且仅当  $A = B = 1$  时输出  $x = 1$ 。

2. “或”门。用表 11-5 表示了真值表,其中当且仅当  $A = B = 0$  时输出  $x = 0$ 。

表 11-4 “与”门

$A$	$B$	$x$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 11-5 “或”门

$A$	$B$	$x$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. “与非”门。用表 11-6 显示的真值表说明当且仅当  $A = B = 1$  时输出  $x = 0$ 。

4. “或非”门。表 11-7 的真值表说明当且仅当  $A = B = 0$  时输出  $x = 1$ 。

表 11-6 “与非”门

$A$	$B$	$x$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 11-7 “或非”门

$A$	$B$	$x$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5. “异或”门。表 11-8 是真值表,说明当且仅当  $A = B$  时输出  $x = 0$ 。

6. “异或非”门。如表 11-9 的真值表所示, 当且仅当  $A=B$  时输出  $x=1$ 。

表 11-8 “异或”门

A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 11-9 “异或非”门

A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

目前已经认识了所研究的二进制函数。现在我们将注意力集中在电路上, 确立实际可行性以实现这些二进制函数。下面将利用各种门, 就像具有理想端极特性的组件一样, 来列出逻辑判断系统的公式。

## 11.2 二极管逻辑电路

任何数字系统的基础都是用来实现二进制逻辑函数的逻辑门。研究仅以二极管和电阻实现的“或”和“与”函数[二极管逻辑(DL)]能够获得对逻辑门电路工作基本概念的理解。

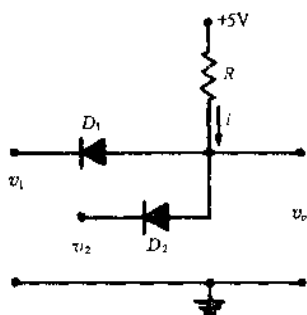


图 11-1

在实际的电子开关中, “通”状态包括输出电压  $0 < v_o < V_L$  的区间(称做低逻辑), “断”状态包括输出电压  $V_L < V_H \leq v_o < \text{电源电压}$  的区间(称做高逻辑); 将  $V_L$  称做低逻辑限, 将  $V_H$  称做高逻辑阈。随后的电路必须能有效地鉴别  $V_L$  和  $V_H$ ; 作为好的设计, 要将  $V_L$  与  $V_H$  之间的不确定区间做成尽量地大。

**例 11.1** 作出图 11-1 电路的真值表以说明这个电路是“与”门。

**解** 如果  $v_1$  和  $v_2$  二者之一或二者皆是逻辑低则  $v_o$  为逻辑低。如果  $v_1$  和  $v_2$  二者皆是逻辑高则  $v_o$  为逻辑高。真值表说明这个电路是“与”门。

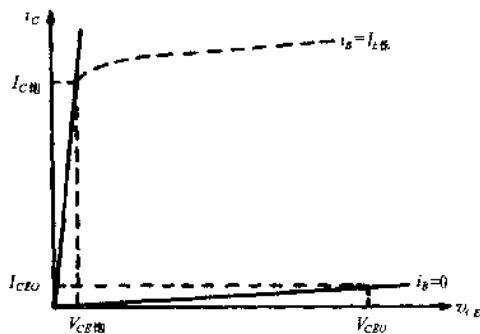
例 11.1 的“与”门用正逻辑。当且仅当输入  $A=B=0$  时负逻辑“与”门得到输出  $x=0$ 。表 11-10 示出了负逻辑二输入“与”门真值表。

正逻辑比负逻辑更为通用, 并且, 除非做出了相反的说明, 就假定为正逻辑。

$v_1$	$v_2$	$v_o$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 11-10 负逻辑“与”门

A	B	x
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

图 11-2<sup>②</sup>

## 11.3 晶体管开关概念

设想图 8-3(c)(见 8.4 节)中饱和区、有效区、截止区之间的边界像图 11-2 中所表示的那样是直线分开的, 就导出了实际的 BJT 开关模型。典型的制造厂技术条件图表给出  $V_{CE\text{sat}}$  的值以及对应的  $i_C = I_{CS}$  和  $i_B = I_{BS}$  的值。还给出  $I_{C\text{EO}}$ <sup>③</sup> 的值和  $v_{CE} = V_{CE1} = V_{CE\text{sat}}$ <sup>②</sup> 的相关值。

当为截止情况(“断”状态)时,  $i_B = 0$ , 以集电极至发射极截止电阻

①原著中为  $I_{C\text{EO}}$ ; ②原著中为  $v_{CE} = V_{CE1} = V_{CE\text{sat}}$ ; ③原著图中为  $I_{C\text{EO}}$  和  $V_{CE1}$ 。——译者注



$$R_{CO} = \frac{V_{CO}}{I_{CO}} \quad (11.1)$$

模拟这个BJT如图11-3(a)所示。将基极至发射极描述为分段线性二极管[见7.5节和图7-10(b)]并将集电极至发射极通道描述为饱和电阻

$$R_{CE} = \frac{V_{CE\text{饱}}}{I_{C\text{饱}}} \quad (11.2)$$

就可以模拟饱和工作(“通”状态)如图11-3(b)所示。当为pnp器件时要反接图11-3的理想二极管。

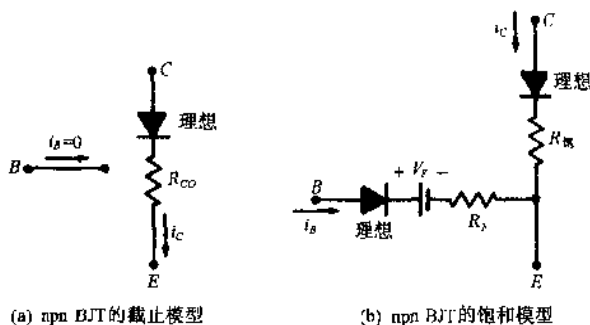


图 11-3

如果做出假定  $V_{CE\text{饱}} = I_B R_F + V_F = 0$ , 则只引起可忽略的误差, 这直接导出图11-4的理想BJT开关模型。

**例 11.2** 对于一个特定的硅 npn BJT, 制造厂技术条件图表指出: 在  $V_{CE} = 25\text{V}$  的试验条件下  $I_{CO} = 20\mu\text{A}$ , 在  $I_C = 15\text{mA}$  和  $I_B = 100\mu\text{A}$  的试验条件下  $V_{CE\text{饱}} = 0.2\text{V}$ , 在  $I_C = 15\text{mA}$  和  $I_B = 100\mu\text{A}$  的试验条件下  $V_{BE} = 1\text{V}$ 。试求出图11-3的开关模型参数。

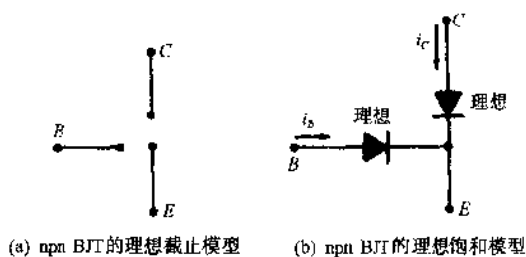


图 11-4

**解** 截止电阻直接由式(11.1)求出:

$$R_{CO} = \frac{V_{CO}}{I_{CO}} = \frac{25}{20 \times 10^{-6}} = 1.25\text{M}\Omega$$

当为典型值  $V_F = 0.5\text{V}$  时, 应用 KVL 至图 11-3(b) 要求

$$R_F = \frac{V_{BE} - V_F}{I_B} = \frac{1 - 0.5}{100 \times 10^{-6}} = 5\text{k}\Omega$$

然后用式(11.2),

$$R_{CE} = \frac{V_{CE\text{饱}}}{I_{C\text{饱}}} = \frac{0.2}{15 \times 10^{-3}} = 13.33\Omega$$

#### 11.4 MOS 场效应管开关概念

制造厂技术条件图表对 MOSFET 给出“通”偏置时(模拟 BJT 的饱和)器件的导电沟道欧姆电阻  $R_{DS\text{on}}$ 。对于直接模拟 BJT 截止的“断”偏置的 MOSFET, 门(或漏)电流是可忽略的。图 11-5 表示了  $n$  沟道 MOSFET 的开关模型; 当为  $p$  沟道器件时将  $i_D$  的方向反过来。

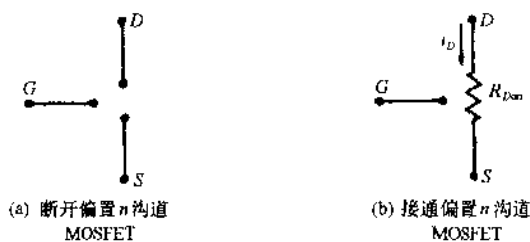


图 11-5

### 11.5 触发器

触发器或双稳态多谐振荡器是具有两个稳定状态的开关电路。可以利用经由适当触发电路的输入电压来触发(改变)这个电路,使其由两状态之一变成另一状态;它可以用作数字逻辑的存储单元。一个简单的双稳态多谐振荡器如图 11-6 中所示,二者之一  $v_{o1} > V_H (=1 \text{ 即高逻辑})$  而  $v_{o2} \leq V_L (=0 \text{ 即低逻辑})$  或者反过来亦可。两个瞬时开关  $R$  和  $S$  用基极触发(短接晶体管基极)来设定  $v_{o1}$  和  $v_{o2}$  的值。(见题 11.13 的实际触发方法。)

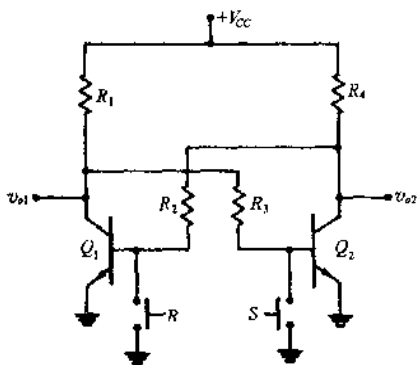


图 11-6

**例 11.3** (a) 如果瞬时接通开关  $S$ , (b) 如果瞬时接通开关  $R$ , 试求出图 11-6 电路中的  $v_{o1}$  和  $v_{o2}$ 。令  $V_{CC} = 5V$  (逻辑电路中常用的值),  $R_1 = R_4 = 1k\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 20k\Omega$ ,  $Q_1$  和  $Q_2$  皆有  $h_{EFmin} = 50$  (见题 11.3),  $Q_1$  和  $Q_2$  皆有  $V_{CEsat} = 0.2V$ 。晶体管是硅器件。

**解** (a) 如果接通  $S$ , 则  $V_{BE2} \approx 0$  而  $Q_2$  是“断”; 但是  $Q_1$  被正向偏置, 而 KVL 要求

$$I_{B1} = \frac{V_{CC} - V_{BE1}}{R_2 + R_4} = \frac{5 - 0.7}{21000} \approx 205 \mu A$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } v_{o2} &= V_{CC} - I_{B1} R_4 \\ &= 5 - (205 \times 10^{-6}) \times 1000 \approx 4.8V \end{aligned}$$

并且由于  $Q_1$  被激励进入饱和,

$$v_{o1} = V_{CEsat} = 0.2V$$

(b) 如果接通  $R$ , 则由对称性可得

$$v_{o1} = 4.8V, \quad \text{而} \quad v_{o2} = 0.2V$$

### 例题解答

**11.1** 用两个开关( $A$  和  $B$ )、一个电池、一个灯泡解释“与”门真值表。

令断开(接通)的开关表示  $A=0(=1)$ , 接成的电路使灯泡照亮时表示  $x=1$ ; 于是用图 11-7 所示的电路即可满足表 11-4。

**11.2** 连接两个开关( $A$  和  $B$ )、一个电池、一个灯泡, 解释“与非”门真值表。

令断开(接通)的开关表示  $A=0(=1)$ , 照亮的灯泡表示  $x=1$ 。于是用串联连接的开关再与灯泡并联即可满足表 11-6, 如图 11-8 所示。增加小电阻  $R$  来限制当接通两个开关时电池所提供的电流。

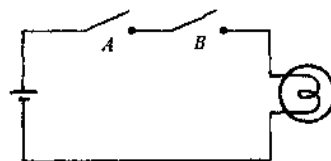


图 11-7

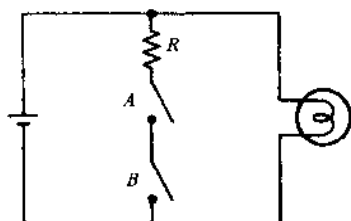


图 11-8

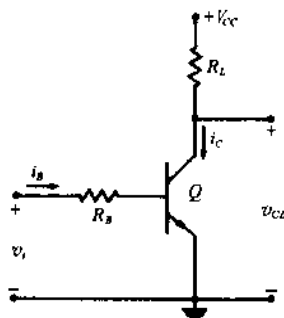


图 11-9

- 11.3 随着 BJT 接近饱和, 集电极基极结变成正向偏置(对有效区工作的反向偏置), 减小了集电极基极耗尽区的宽度, 从而使低百分比的多数载流子被扫入集电极,  $\alpha$  以及  $\beta = h_{FE} = \alpha/(1-\alpha)$  都要减小。制造厂技术条件图表给出在接近饱和区对开关晶体管测得的  $h_{FEmin}$  值, 这对于在饱和区工作的集电极电流与基极电流关系是有效的。对于图 11-9 所示的电路,  $V_{CC} = 15V$ , 晶体管以图 11-4(b) 模拟。(a) 如果  $h_{FEmin} = 30$  和  $R_L = 1k\Omega$ , 求出  $i_B = I_{Bsat}$  的最小值。(b) 如果  $h_{FEmin} = 30$  和  $i_B = 100\mu A$ , 求出将获得饱和区工作时  $R_L$  的最大值。

解 (a) 图 11-4(b) 的模型是基于  $V_{CEsat} = 0$  的假定; 因此, 对于饱和条件

$$I_{Csat} = \frac{V_{CC}}{R_L} = \frac{15}{1 \times 10^3} = 15mA$$

最小的基极电流为

$$I_{Bsat} = \frac{I_{Csat}}{h_{FEmin}} = \frac{15 \times 10^{-3}}{30} = 500\mu A$$

(b) 饱和时的集电极电流为

$$I_{Csat} = h_{FEmin} I_{Bsat} = 30 \times (100 \times 10^{-6}) = 3mA$$

因此

$$R_L \leq \frac{V_{CC}}{I_{Csat}} = \frac{15}{3 \times 10^{-3}} = 5k\Omega$$

- 11.4 证明图 11-9 的电路可以在数字逻辑电路中用作倒相器即“非”门。

$v_i$		$v_o$	
实际	逻辑	实际	逻辑
$V_H$	1	0	0
$V_L$	0	$V_{CC}$	1

解 如果  $v_i (= V_H > 0)$  充分大, 使晶体管饱和, 则  $v_o = v_{CE} = V_{CEsat} \approx 0$ 。如果  $v_i (= V_L < V_{BEQ} \approx 0)$  充分小, 以致于这个晶体管被截止, 则有  $v_o = v_{CE} \approx V_{CC}$ 。真值表清楚地显示出是“非”逻辑。

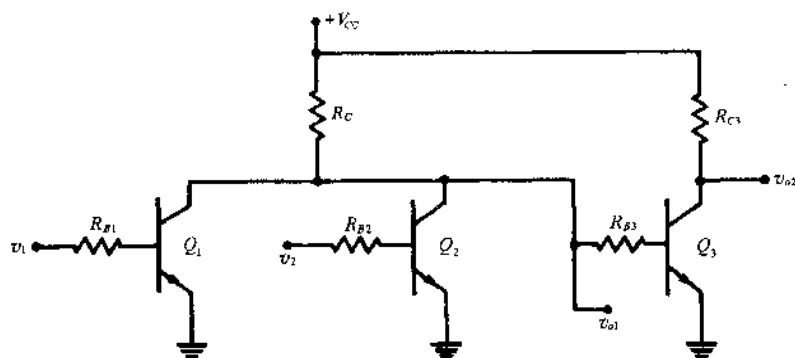
- 11.5 利用真值表证明图 11-10 的电路, (a) 如果将  $v_{o1}$  作为输出就是“或非”门, (b) 如果将  $v_{o2}$  作为输出就是“或”门。

解 (a) 如果  $v_1 \geq V_H$ , 则  $Q_1$  饱和且  $v_{o1} = V_{CEsat}$ 。如果  $v_2 \geq V_H$ , 则  $Q_2$  饱和且  $v_{o1} = V_{CEsat}$ 。如果  $Q_1$  和  $Q_2$  二者都截止<sup>②</sup>, 则  $v_{o1} \approx V_{CC}$ 。真值表说明了将  $v_{o1}$  作为输出时就是“或非”门。

(b) 由  $v_{o1} = V_{CEsat}$  低于使  $Q_3$  导通的电平, 又如果恰当地设定了  $R_{B3}$ , 则  $v_{o1} = V_{CC}$  将导致  $Q_3$  饱和, 所以  $Q_3$  级就是倒相器(“非”门)。于是输出  $v_{o2}$  是  $v_{o1}$  的逻辑补(其中各 0 与各 1 互换), 如真值表所示, 并且总的逻辑就是“或”门。

$v_1$		$v_2$		$v_{o1}$		$v_{o2}$	
实际	逻辑	实际	逻辑	实际	逻辑	实际	逻辑
$V_H$	1	$V_H$	1	$V_{CEsat}$	0	$V_{CC}$	1
$V_L$	0	$V_L$	0	$V_{CC}$	1	$V_{CEsat}$	0
$V_H$	1	$V_L$	0	$V_{CEsat}$	0	$V_{CC}$	1
$V_L$	0	$V_H$	1	$V_{CEsat}$	0	$V_{CC}$	1

①原著中为  $v_{o2}$ ; ②原著中为“饱和”。——译者注

图 11-10<sup>①</sup>

11.6 建立图 11-11 二极管逻辑电路的真值表,证明这个电路是正逻辑的“或”门。

如果  $v_1$  和  $v_2$  二者之一是或二者皆是逻辑高( $\geq V_H$ ), 则  $v_o \geq V_H - 0.7$ 。否则  $v_o = 0$ 。真值表说明了“或”逻辑。

$v_1$	$v_2$	$v_o$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

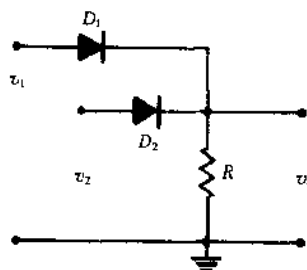


图 11-11

11.7 用真值表证明图 11-12 的二极管晶体管逻辑(DTL)电路是“与非”门。

由例 11.1 的推广,看出节点 A 的信号是三输入“与”门的输出。接着,节点 A 右侧的晶体管电路构成倒相器[二极管  $D_4$  确保当  $v_A \approx 0.7V$ (低逻辑)时晶体管不转换成“通”]。将例 11.1 的真值表扩充为包含三个输入和  $v_A$  的逻辑补,证明总的逻辑是“与非”门。

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_A$	$v_o = v_A$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

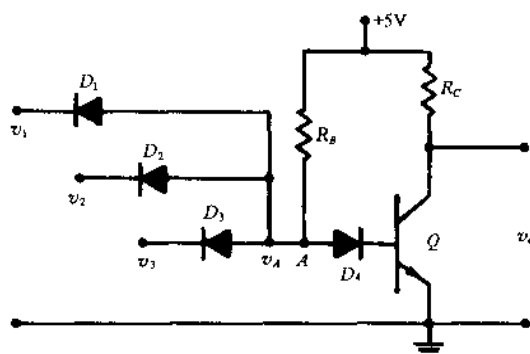


图 11-12

11.8 通过利用真值表证明图 11-13 的基本电阻晶体管逻辑(RTL)门是正逻辑的“或非”门。

如果  $v_1 \geq V_H$ , 则  $Q_1$  饱和且  $v_o = V_{CE\text{饱和}}$ 。又如果  $v_2 \geq V_H$ , 则  $Q_2$  饱和且  $v_o = V_{CE\text{饱和}}$ 。进而如果  $Q_1$  和  $Q_2$  二者皆饱和, 则  $v_o = V_{CE\text{饱和}}$ 。然而, 如果  $v_1$  和  $v_2$  二者皆  $< V_L$ <sup>②</sup>, 则  $Q_1$  和  $Q_2$  二者皆“断”, 且  $v_o \approx V_{CC}$ 。下面的真值表说明了“或非”逻辑。

①原著中无  $R_{C3}$  电阻。——译者注

②原著中为  $V_H$ 。——译者注

$v_1$		$v_2$		$v_o$	
实际	逻辑	实际	逻辑	实际	逻辑
$V_L$	0	$V_L$	0	$V_{CC}$	1
$V_L$	0	$V_H$	1	$V_{CE\text{饱和}}$	0
$V_H$	1	$V_L$	0	$V_{CE\text{饱和}}$	0
$V_H$	1	$V_H$	1	$V_{CE\text{饱和}}$	0

- 11.9 关于图 11-13 中的 RTL 电路, 令  $V_{CC} = 5\text{V}$ ,  $V_H = 3.5\text{V}$ ,  $R_C = 640\Omega$ ,  $R_{B1} = R_{B2} = 450\Omega$ ,  $V_{CE\text{饱和}} = 0.2\text{V}$ ,  $\beta = 50$ 。试求扇出数, 即不致有逻辑错误危险之下能够衔接至  $v_o$  的同类门数目。

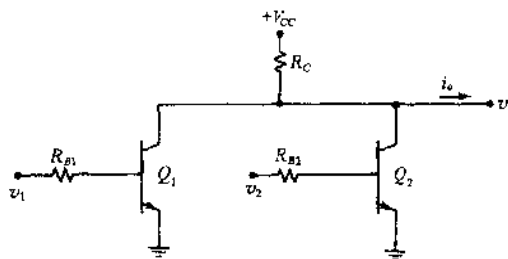


图 11-13

对于每个接连的门, 当晶体管处于饱和时, 需要的电流为

$$I_{B\text{饱和}} = \frac{I_{C\text{饱和}}}{\beta} = \frac{V_{CC} - V_{CE\text{饱和}}}{\beta R_C} = \frac{5 - 0.2}{50 \times 640} = 0.15\text{mA} \quad (1)$$

对于  $n$  个外接的门,

$$i_o = nI_{B\text{饱和}} \quad (2)$$

为了保证没有逻辑错误,

$$v_o = V_{CC} - i_o R_C \geq V_H = 3.5\text{V} \quad (3)$$

将(2)代入(3), 移项, 并用(1)求得

$$n \leq \frac{V_{CC} - 3.5}{R_C I_{B\text{饱和}}} = \frac{5 - 3.5}{640 \times (0.15 \times 10^{-3})} = 15.6$$

$$n \leq 15$$

于是,

- 11.10 如果题 11.9 的参数是恰当的, 试求出图 11-13 的 RTL 二输入“或非”<sup>①</sup>门消耗的功率。

最不利的情況是由于高逻辑输入使  $Q_1$  和  $Q_2$  两者饱和。仅需考虑集电极电路的功率消耗。

$$I_{C\text{饱和}} = \frac{V_{CC} - V_{CE\text{饱和}}}{R_C} = \frac{5 - 0.2}{640} \approx 7.5\text{mA}$$

$$\text{功率 } P_{CC} = V_{CC} I_{C\text{饱和}} = 5 \times (7.5 \times 10^{-3}) = 37.5\text{mW}^{②}$$

- 11.11 图 11-14 的晶体管晶体管逻辑(TTL 或  $T^2L$ )直接将输入信号加至晶体管端极(无限流电阻)。如果  $v_1$  和  $v_2$  二者之一是或二者都是逻辑低, 则激励  $Q_1$  饱和。试作此电路的真值表, 证明输出  $v_{o1}$  显示“与”逻辑且输出  $v_{o2}$  显示“与非”逻辑。

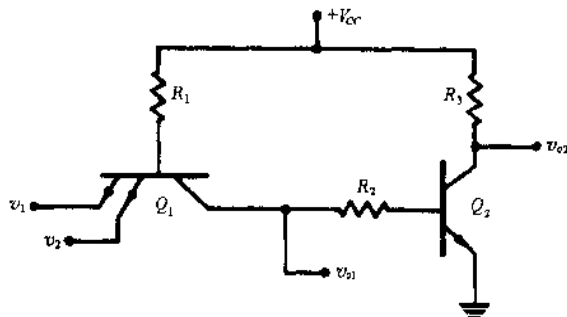


图 11-14

① 原著中为“与非”。——译者注

② 原著中以为两个晶体管得 75mW。——译者注

当  $Q_1$  饱和时  $v_{o1}$  为逻辑低, 否则  $v_{o1}$  为逻辑高。又如果  $Q_1$  饱和以致  $v_{o1}$  为逻辑低时, 则  $Q_2$  为“断”而  $v_{o2}$  为逻辑高。反之, 如果  $Q_1$  为“断”使  $v_{o1}$  为逻辑高时, 则激励  $Q_2$  饱和, 保持  $v_{o2}$  为逻辑低。因此  $v_{o2}$  是  $v_{o1}$  的逻辑补, 得出对应的真值表如下所示。

$v_1$	$v_2$	$v_{o1}$	$v_{o2}$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

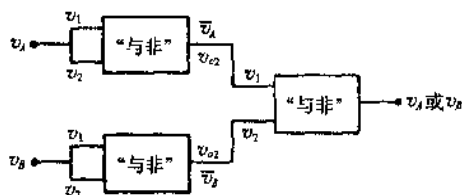


图 11-15

- 11.12 经常将 TTL 逻辑门用作“与非”门。适当地将“与非”门同倒相器连接就构成其他类型的门。试绘制出方框图, 用图 11-14 的二输入 TTL“与非”门同倒相器(“非”门)连接以构成一个“或”门。

见图 11-15。

- 11.13 图 11-6 的双稳态多谐振荡器是按有瞬时开关表示的, 然而在实际应用中必须进行电子式的触发。一种可能性是在  $R$  或  $S$  的上接点处施加一个短持续期的低逻辑信号来触发状态的转换。但是若将短持续期的负电压  $v_{tr}$  接至被触发晶体管的基极发射极结两端, 所引起的反向电荷流动将加速晶体管断路过程。可以用如图 11-16 所示的  $RC$  电路(微分电路作用)来实现这样的负触发电压。如果当一个矩形脉冲  $v_R$  到达图 11-16 中的端点  $R$  时,  $Q_2$  饱和和工作, 试定性地讨论所发生的翻转过程。

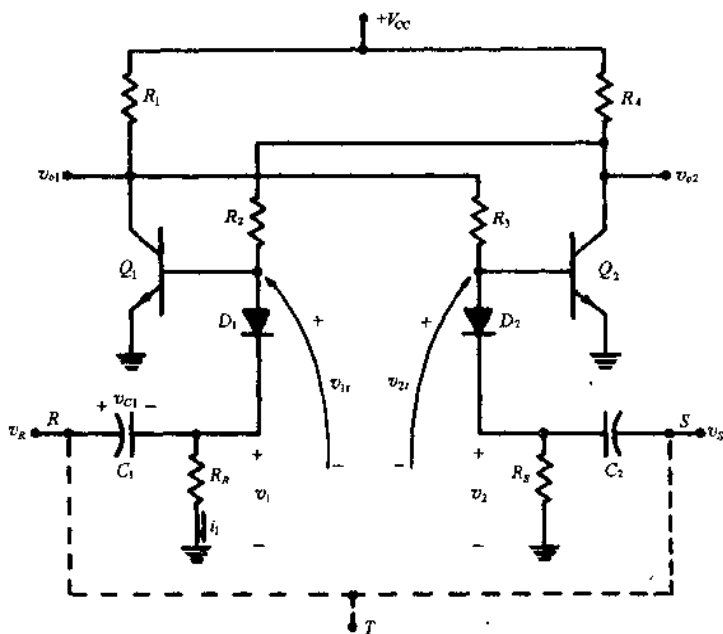


图 11-16

首先看电压  $v_1$  (若  $RC$  很小  $v_1 \approx R_6 C_1 dv_R/dt$ ), 假定  $Q_1$  的基极回路表现为可忽略的负载。这时进入端点  $R$  的矩形脉冲对电容  $C_1$  充电又放电, 在图 11-17 中描绘了所得的输出电压  $v_1$  (假设时间常数  $R_6 C_1$  比输入脉冲持续期  $\tau$  小很多)。

二极管  $D_1$  阻断  $v_1$  的正偏移, 使其不进入  $Q_1$  的基极发射极结。然而,  $v_1$  的负偏移正向偏置了  $D_1$ , 因之瞬时地使  $v_{be1} < 0$ ;  $Q_1$  断路和双稳态多谐振荡器转换状态如题 11.13 文中所述。

显然要用脉冲  $v_R$  的下降边触发这个双稳态多谐振荡器; 如果希望响应于上升边, 可以在将  $v_R$  施加至端点  $R$  之前使其倒相。另外如果将端点  $R$  和  $S$  连接在一起构成一个端点  $T$ , 于是就可以将双稳态多谐振荡器做成反复电路, 即用进入端点  $T$  的一连串脉冲使其交替地转换状态(见图 11.14)。

11.14 将两个具有触发输入  $T$  的触发器级联起来如图 11-18(a)所示。输入  $v_T$  是频率为 100kHz 的一个方脉冲串(如来自时钟)。试画  $v_{o11}$ 、 $v_{o21}$ 、 $v_{o12}$ 、 $v_{o22}$  的波形略图,表明这个电路是一个分频器(输出波形的周期是输入波形周期的整数倍)。

将图 11-16 的端点  $R$  和  $S$  连接起来构成触发端  $T$ ,只要晶体管  $Q_1$  (或  $Q_2$ ) 是“断”,图 11-17 的波形  $v_1$  (或  $v_2$ ) 对  $Q_1$  (或  $Q_2$ ) 就没有作用,因此必定是对饱和晶体管触发了转换作用。同步图表示在开关电路中做为时间函数的信号间相互关系;在图 11-18(b)中是基于假定  $Q_{11}$  和  $Q_{12}$  (分别是 FF-1 和 FF-2 的  $Q_1$ ) 在  $t=0$  时刻为饱和和画的;于是  $Q_{11}$  被  $v_1$  的第一个下降边转换成截止;而  $Q_{12}$  被  $v_{o11}$  的第一个下降边转换成截止。注意各波形周期之间的关系。

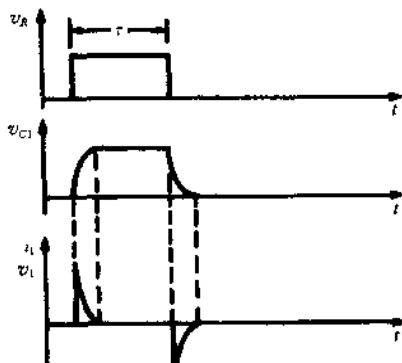
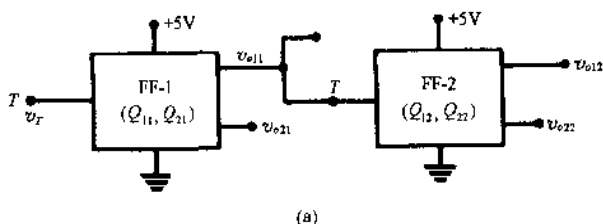
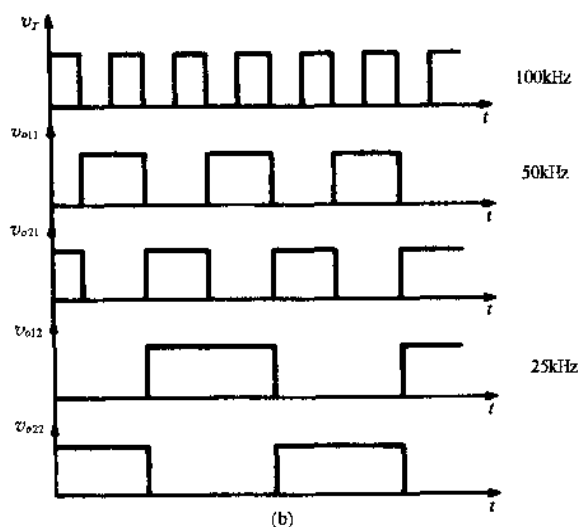


图 11-17



(a)



(b)

图 11-18

### 补充习题

11.15 连接两个开关( $A$ 和 $B$ ),一个电池,一个灯泡,举出“或”门真值表的例。

答 见图 11-19。

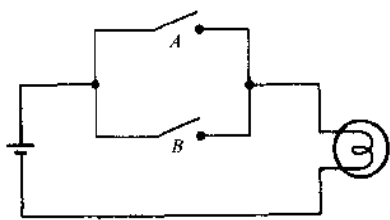


图 11-19

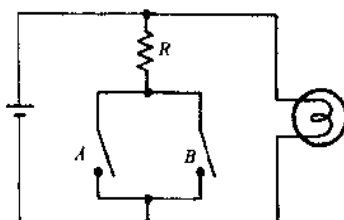


图 11-20

11.16 用两个开关(A和B),一个电池,一个灯泡举出“或非”门真值表的例。

答 见图 11-20,其中小电阻  $R$  用于限制电流。

11.17 证明 11-1 的 DL 电路是负逻辑的“或”门。

11.18 证明 11-11 的二极管逻辑电路是负逻辑的“与”门。

11.19 关于图 11-12 的 DTL 电路,令  $R_B = 10\text{k}\Omega$  和  $R_C = 2\text{k}\Omega$ 。如果  $v_1 = v_2 = v_3 = 5\text{V}$ ,为了保证晶体管  $Q$  的饱和,试确定  $h_{FE\min}$  的最小值。

答 6.67

11.20 如果  $v_1 = v_2 = v_3 = 5\text{V}$ ,试求图 11-12 的 DTL 门消耗的功率。假定当为题 11.19 中给定的  $R_B$  和  $R_C$  值时晶体管被饱和。计入基极电路损耗。

答 13.8mW

11.21 利用具有  $V_F = 0.5\text{V}$ ,  $R_{BE} = 15\Omega$  和  $R_F = 3\text{k}\Omega$  时图 11-3 的模型再解题 11.3。

答 (a)492.6 $\mu\text{A}$ ; (b) $R_L \leq 999.9\Omega$

11.22 试计算图 11-9 的电路,当(a)截止时,(b)饱和时,(c) $V_{CE} = 7.5\text{V}$ 时消耗的集电极功率,证明当 BJT 工作于开关模式时的集电极功率消耗远低于当它工作于有效区时的集电极功率消耗。假定  $R_L = 1\text{k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 15\text{V}$ ,且以  $R_{BE} = 15\Omega$ ,  $V_{CE\text{sat}} = 0.2\text{V}$  和  $R_{CO} = 1\text{M}\Omega$  描述晶体管。

答 (a)0.225mW; (b)3.25mW; (c)56.25mW

11.23 如果将  $v_{o1}$  作为输出,利用真值表证明图 11-21 的电路是一个“与非”门。

11.24 如果  $v_{o2}$  是输出,通过利用真值表证明图 11-21 的电路是一个“与”门。

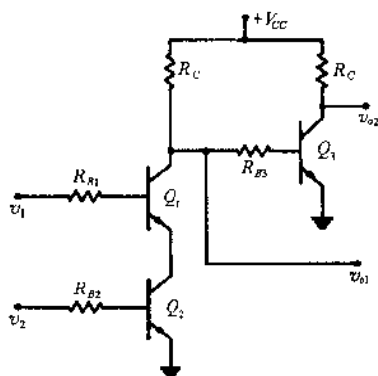


图 11-21

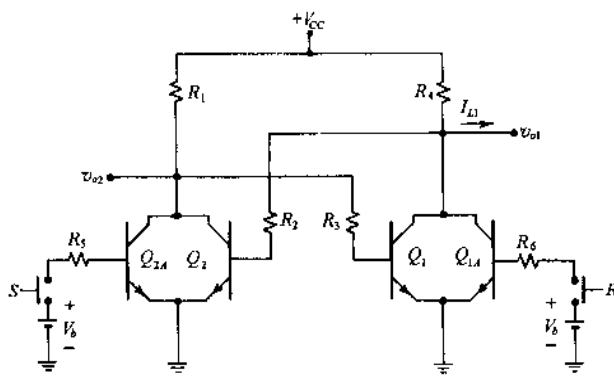


图 11-22

11.25 关于图 11-22 中的双稳态多谐振荡器,令  $V_b = V_{CC} = 5\text{V}$ ,  $R_1 = R_4 = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_5 = R_6 = 25\text{k}\Omega$ 。硅晶体管的  $h_{FE\text{sat}} = 50$ ,  $V_{CE\text{sat}} = 0.2\text{V}$ 。如果瞬时地接通开关  $S$ ,试求电压  $v_{o1}$  和  $v_{o2}$ 。假定当  $S$  接通时  $Q_{2A}$  饱和。

答  $v_{o1} = 4.61\text{V}$ ,  $v_{o2} = V_{CE\text{sat}} = 0.2\text{V}$

11.26 关于题 11.25 的双稳态多谐振荡器,如果瞬时地接通开关  $R$ ,试求电压  $v_{o1}$  和  $v_{o2}$ 。

答  $v_{o1} = V_{CE\text{sat}} = 0.2\text{V}$ ,  $v_{o2} = 4.61\text{V}$

11.27 关于图 11-22 中双稳态多谐振荡器的晶体管,为了保持饱和需基极电流最小值为  $150\mu\text{A}$ 。如果全部电阻具有题 11.25 所给的值,当  $Q_2$  饱和时,试求在仍能保持  $Q_2$  饱和的情况下,可被随后逻辑门吸收的最大负载电流  $I_{L1}$ 。

答 0.5mA

11.28 证明图 11-23 的 NMOS 电路是一个正逻辑的“或非”门。假定  $V_T = 2\text{V}$ ,  $Q_3$  仅是一个非线性电阻。

11.29 证明图 11-24 的 NMOS 电路是一个正逻辑的“与非”门。



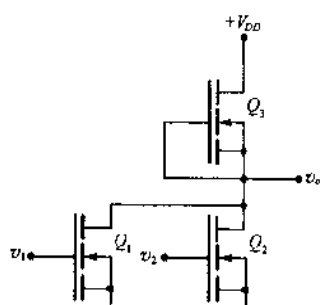


图 11-23

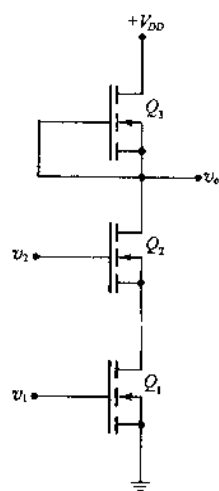


图 11-24

## 12.1 布尔代数

数字电路利用“通-断”(真-伪,高-低,0-1)双稳态组件来完成名为二值布尔代数逻辑系统(当含有硬件实现时称为数字逻辑)的工作。它的叙述可以采取代数表达式、逻辑方框图、真值表、以及电路各种形式。

表 12-1 以代数表达式形式列出了布尔代数的定理,其中

$A, B, C \equiv$  逻辑变量

$0 \equiv$  空(或零)位

$1 \equiv$  全位

$\cdot \equiv$  “与”(逻辑相乘)

$+\equiv$  “或”(逻辑相加)

$\bar{A} \equiv A$  的非(或补)

表 12-1 布尔代数定理

序 号	定 理	名 称
1(a)	$A + B = B + A$	交换律
(b)	$A \cdot B = B \cdot A$	
2(a)	$(A + B) + C = A + (B + C)$	结合律
(b)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	
3(a)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	分配律
(b)	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	
4(a)	$A + A = A$	重叠律
(b)	$A \cdot A = A$	
5	$\bar{\bar{A}} = A$	非律
6(a)	$A + A \cdot B = A$	吸收律
(b)	$A \cdot (A + B) = A$	
7(a)	$0 + A = A$	布尔公理
(b)	$1 \cdot A = A$	
(c)	$1 + A = 1$	
(d)	$0 \cdot A = 0$	
8(a)	$\bar{A} + A = 1$	
(b)	$\bar{A} \cdot A = 0$	
9(a)	$A + \bar{A} \cdot B = A + B$	
(b)	$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$	
10(a)	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	摩根定律
(b)	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$	

完全归纳法(利用可假定变量值的全部可能组合来检验定理的一种证明方法)可以有序地进行用真值表证明表 12-1 的定理。

**例 12.1** 按完全归纳法用真值表证明表 12-1 的定理 4。

**解** 关于完全归纳法的真值表,列数可以按所进行证明的布尔函数种类改变,行数可以按布尔函数中包含的变量数改

$A$	$A$	$A + A$	$A \cdot A$
1	1	1	1
0	0	0	0

变。对于定理4充分的表见右表。

鉴于表示A全部可能值的第一列与表示 $A + A$ 全部可能值的第三列是相同的,完全归纳的方法证明了定理4(a)。另外,在A的全部可能值之下第一列与最后列是相同的,用完全归纳的方法证明了定理4(b)。

## 12.2 逻辑门和逻辑化简

执行第11章开关逻辑的数字电路单元称为数字逻辑门,图12-1中示出了它们的符号。包含这些符号的电路称为逻辑方框图。

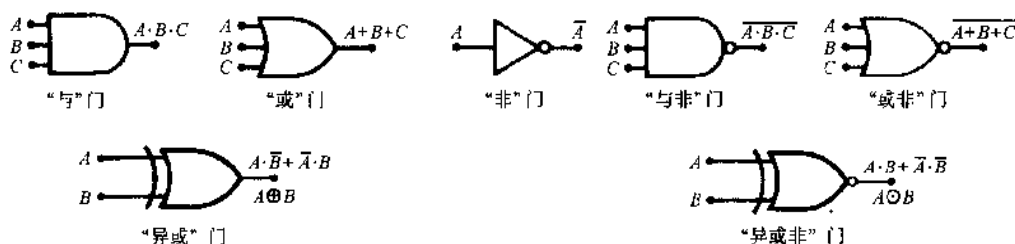


图 12-1

在数字电路设计中通常的步骤是,先不考虑其复杂程度,提出一个描述所需过程的逻辑陈述即函数。然后审查这个函数可能的化简,使能实现具有最少的逻辑门。一种化简方法是利用表12-1的定理变换这个函数,直到找出一个需用最少逻辑门的等效组合。

**例 12.2** 写出图12-2逻辑方框图总输出X的代数表达式,然后用表12-1的定理简化它。

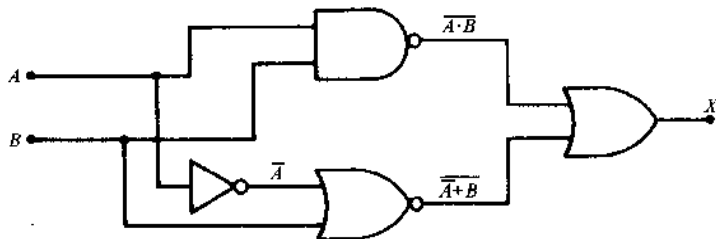


图 12-2

**解** 由于有图12-2中所示的中间逻辑门输出,总输出必定是

$$X = \overline{A \cdot \bar{B}} + \bar{A} + \bar{A} + B$$

应用摩根定律、定理9、定理4,得

$$X = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B}) = \bar{A} + \bar{B}$$

依据摩根定律,此式也可写为

$$X = \overline{A \cdot B} \quad (1)$$

**例 12.3** 由例12.2的(1),很明显图12-2的整个逻辑网络可以用单个的二输入“与非”门替换。试绘制一个真值表来验证这个看法。

**解** 图12-2的真值表仅需包括逻辑变量A、B值的全部组对和X的所得值;但是,用表示中间值的列来扩大这个基本真值表也是切实可行的,如右表。显然,输出列与 $\overline{A \cdot B}$ 列是相同的并且可以用它替换。

**例 12.4** 设计一个电路以实现下述逻辑:

1. 如果A、B、C全部在场(=1,真),则程序是正确的(=1,真)。

A	B	$\bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{\bar{A} + \bar{B}}$	X
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

2. 如果  $A, B, C$  全部不在 ( $=0$ , 伪) 则程序是正确的 ( $=1$ , 真)。

3. 如果  $B$  在场 ( $=1$ , 真), 则程序是正确的 ( $=1$ , 真)。

4. 除此以外, 程序是错误的 ( $=0$ , 伪)。

(a) 将程序状态表示为数字逻辑函数, (b) 变换这个函数以将其简化 (于是需要更少的逻辑门), (c) 画出原初系统的和简化系统的逻辑方框图。

**解** (a) 直接地构成一个包括全部导致正确程序 (输出为 1) 的“或”表达式。由陈述 1 至 3,

$$X = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + B \quad (1)$$

(b) 在 (1) 的第二项上运用第一摩根定律给出

$$X = A \cdot B \cdot C + \overline{A + B + C} + B \quad (2)$$

将吸收律应用至 (2) 得

$$X = (B + A \cdot B \cdot C) + \overline{A + B + C} = B + \overline{A + B + C} \quad (3)$$

(c) 在图 12-3(a) 中示出了如 (1) 所描述的原初系统逻辑方框图, 其中需要用六个逻辑门。如图 12-3(b) 的举例, 仅用两个逻辑门就能实现方程 (3)。

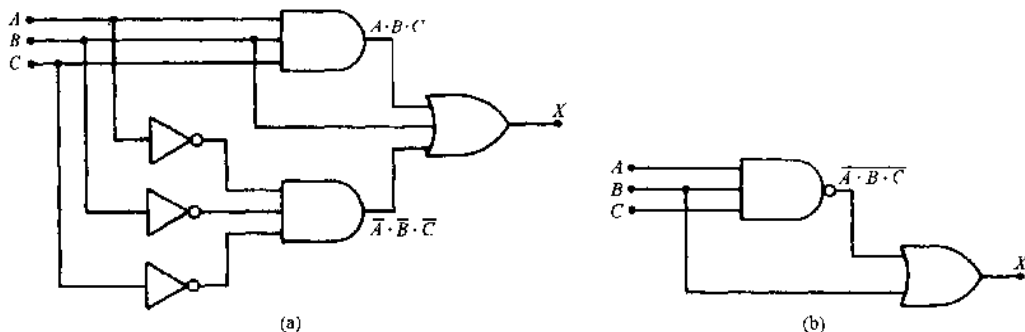


图 12-3

如前面三个例题所表明的, 利用表 12-1 中定理进行的化简并不是系统性的; 而是一个试凑过程。卡诺图是一种系统性的化简工具, 是真值表的另一形式。这样对于出现在真值表中的可能组合数目, 必定会由这种图中统计出同样的数目; 因而当为  $n$  个变量时, 就存在  $2^n$  个组合。如果条件允许, 可以识别出最大可能的仅含逻辑 1 相邻方块图样, 来完成布尔函数的化简。

**例 12.5** 试利用卡诺图简化  $f = A + \bar{A} \cdot B$ 。

**解**  $f$  的第一项  $A$  覆盖卡诺图第一行中的两个方块; 于是 1 占据了这一行。第二行  $\bar{A} \cdot B$  仅覆盖卡诺图的右下方块而且也填入 1。图

	$\bar{B}$	$B$
$A$	1	1
$\bar{A}$	0	1

的剩余部分中填入 0 以给出完整的卡诺图。当认定相邻方块的图样时, 图的分分区可以多于一次地用到 (用表 12-1 的定理 4 证明)。对于上面的卡诺图, 全部的 1 被包括上边行 ( $A$ ) 和右边列 ( $B$ ) 的两个图样用到至少一次。于是

$$f = A + B$$

### 12.3 组合逻辑电路

输出仅取决于现有输入时的逻辑电路称为组合逻辑电路。组合电路包括两个或更多的输入, 一个逻辑门的互连以完成特定的逻辑算法, 一个或更多的输出以传送结果。这样的逻辑电路之一是半加器, 这是能够实现二进制 (2 基的) 数加法的二输入二输出电路。

**例 12.6** 试设计一个半加器组合逻辑电路。

**解** 令  $A$  和  $B$  是半加器的输入,  $S$  是一个二进制数字 (数位) 上的和,  $C_o$  是必须加至后面更重要一列的进位输出。于是表 12-2 描述了半加器的运算。

由表 12-2 看到输出  $S$  是“异或”逻辑 (见表 11-8)。又看到输出  $C_o$  是“与”逻辑 (见表 11-

4)。于是,利用图 12-4 的逻辑电路就可以模拟半加器。

表 12-2 半加器

输入		输出	
A	B	S	C <sub>o</sub>
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

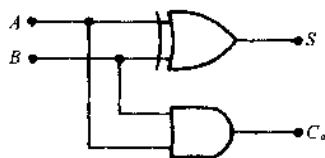


图 12-4

## 例题解答

12.1 用代数变换,就是用表 12-1 的定理,简化布尔函数  $f = B \cdot (A + \bar{B})$ 。

$$\begin{aligned} f &= A \cdot B + B \cdot \bar{B} && \text{定理 3(a)} \\ &= A \cdot B && \text{定理 8(b)} \end{aligned}$$

12.2 用代数方法简化  $f = A \cdot (A + B) + B \cdot (\bar{A} + B)$ 。

$$\begin{aligned} f &= A \cdot A + A \cdot B + \bar{A} \cdot B + B \cdot B && \text{定理 3(a)} \\ &= A + A \cdot B + \bar{A} \cdot B + B && \text{定理 4(b)} \\ &= A + (A + \bar{A}) \cdot B + B && \text{定理 3(a)} \\ &= A + B + B && \text{定理 8(a)} \\ &= A + B && \text{定理 4(a)} \end{aligned}$$

12.3 用代数变换简化

$$\begin{aligned} f &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D \\ f &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{D} + D) + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{D} + D) && \text{定理 3(a)} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (1) + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (1) && \text{定理 8(a)} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} && \text{定理 7(b)} \\ &= (\bar{A} + A) \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} && \text{定理 3(a)} \\ &= \bar{B} \cdot \bar{C} && \text{定理 8(a) 和 7(b)} \end{aligned}$$

12.4 用代数方法简化  $f = \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot C$ 。

$$\begin{aligned} f &= \bar{A} \cdot B + (\bar{A} + A \cdot \bar{B} + B) \cdot C && \text{定理 1(a) 和 3(a)} \\ &= \bar{A} \cdot B + [\bar{A} + A \cdot \bar{B} + (A + \bar{A}) \cdot B] \cdot C && \text{定理 8(a)} \\ &= \bar{A} \cdot B + [\bar{A} + A \cdot \bar{B} + A \cdot B + A \cdot B] \cdot C && \text{定理 3(a)} \\ &= \bar{A} \cdot B + [\bar{A} + A \cdot (\bar{B} + B) + \bar{A} \cdot B] \cdot C && \text{定理 3(a)} \\ &= \bar{A} \cdot B + [\bar{A} + A + \bar{A} \cdot B] \cdot C && \text{定理 8(a)} \\ &= \bar{A} \cdot B + [1 + \bar{A} \cdot B] \cdot C && \text{定理 8(a)} \\ &= \bar{A} \cdot B + C && \text{定理 7(c)} \end{aligned}$$

12.5 试用完全归纳的方法证明表 12-1 的定理 6(a),  $A + A \cdot B = A$ 。

$A + A \cdot B = A$  的充分真值表如表所示:

对于变量 A 和 B 的全部可能组合,表示 A 的第一列与表示  $A + A \cdot B$  的第末列是相同的,于是用完全归纳的方法证明了定理 6(a)。

12.6 用完全归纳法证明表 12-1 的定理 5——非律。

下面编制了  $\bar{\bar{A}} = A$  的充分真值表,很明显其中第一列与第三列是相同的;由此用完全归纳的方法证明了定理 5。

A	B	$A \cdot B$	$A + A \cdot B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

A	A	$\bar{A}$
0	1	0
1	0	1

12.7 应用完全归纳的方法证明表 12-1 的四个布尔公理。

四个布尔公理  $0 + A = A$ ,  $1 \cdot A = A$ ,  $1 + A = 1$ ,  $0 \cdot A = 0$  的充分真值表编制如下:

A	0	1	$0 + A$	$1 \cdot A$	$1 + A$	$0 \cdot A$
0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0

根据如下对真值表的观察,包括了用完全归纳方法进行的证明:

1. 第一列与第四列是相同的;由此证明了定理 7(a)。
2. 第一列与第五列是相同的;由此证明了定理 7(b)。
3. 第三列与第六列是相同的;由此证明了定理 7(c)。
4. 第二列与第七列是相同的;由此证明了定理 7(d)。

12.8 试用完全归纳的方法证明表 12-1 的定理 2(a),  $(A + B) + C = A + (B + C)$ 。

在下面编制了  $(A + B) + C = A + (B + C)$  的充分真值表:

A	B	C	$A + B$	$B + C$	$(A + B) + C$	$A + (B + C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

由于在 A、B、C 的全部可能值上,最后两列是相等的,用完全归纳法就证明了这个定理。

12.9 试求用图 12-5 的逻辑电路所模拟的布尔函数  $f$ 。

门输出是

$$X = A \cdot B \quad (1)$$

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad (2)$$

$$f = X + Y \quad (3)$$

将(1)和(2)代入(3)得到

$$f = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B}) \quad (4)$$

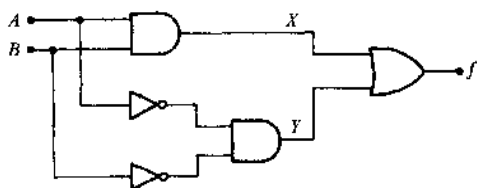


图 12-5

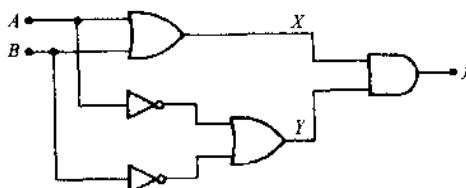


图 12-6

12.10 试求用图 12-6 的逻辑电路所模拟的布尔函数  $f$ 。

■ 门输出如下：

$$X = A + B \quad (1)$$

$$Y = \bar{A} + \bar{B} \quad (2)$$

$$f = X \cdot Y \quad (3)$$

在(3)中利用(1)和(2)给出

$$f = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \quad (4)$$

12.11 通常模拟特定布尔函数的逻辑电路并不是惟一的。试证明图 12-7 的逻辑电路与图 12-5 的逻辑电路模拟相同的布尔函数。

■ 参考图 12-7,

$$X = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad (1)$$

$$Y = A \cdot B \quad (2)$$

$$f = X + Y \quad (3)$$

(1)的右边应用了摩根定律。将(1)和(2)代入(3),求出所模拟的布尔函数为:

$$f = (\bar{A} \cdot \bar{B}) + (A \cdot B) \quad (4)$$

此式与题 12.9<sup>①</sup>的(4)是相同的。注意图 12-7 中比图 12-5 中需用更少的逻辑门。

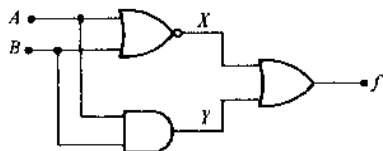


图 12-7

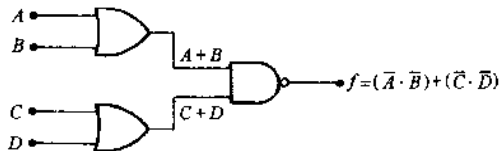


图 12-8

12.12 试构成一个逻辑电路以模拟出布尔函数  $f = (\bar{A} \cdot \bar{B}) + (\bar{C} \cdot \bar{D})$ 。

■ 将摩根定律用至  $f$ , 看到

$$f = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B}) + (\bar{C} \cdot \bar{D})} = (A + B) \cdot (C + D)$$

现在, 可以用二输入“或”门形成  $(A + B)$  和  $(C + D)$  中的每一个, 并将结果输送至一个“与非”门以得到  $f$ 。见图 12-8 的逻辑方框图。

12.13 仅使用“与非”门设计一个逻辑电路以模拟出布尔函数  $f = A \cdot (B + C)$ 。

■ 用表 12-1 的定理 3(a),

$$f = A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \quad (1)$$

对(1)利用定理(5), 然后应用摩根定律, 给出

$$f = \overline{\overline{(A \cdot B) + (A \cdot C)}} = \overline{(\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + \bar{C})}$$

现在可以用“与非”门模拟  $X = \bar{A} + \bar{B}$  和  $Y = \bar{A} + \bar{C}$  中的每一个。然后每个输出可以输送至一个“与非”门以产生  $f = \overline{X \cdot Y}$ 。见图 12-9 所示的逻辑电路。

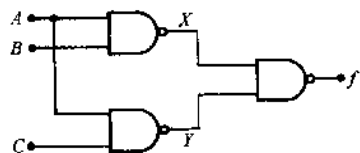


图 12-9

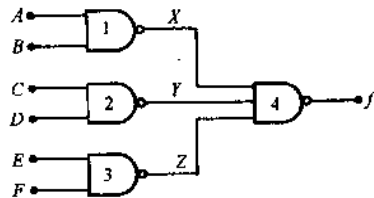


图 12-10

12.14 试描述一个仅使用“与非”门的布尔函数  $f = A \cdot B + C \cdot D + E \cdot F$  的实现。

■ 见图 12-10, 其中

$$X = \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

① 原著中为 12.10。——译者注

$$Y = \bar{C} + \bar{D}$$

$$Z = \bar{E} + \bar{F}$$

因此  $f = \overline{X \cdot Y \cdot Z} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + \bar{E} + \bar{F} = A \cdot B + C \cdot D + E \cdot F$

12.15 试描述仅使用“或非”门时  $f = A \cdot B$  的实现。

见图 12-11, 其中  $X = A + A = \bar{A} \cdot \bar{A} = \bar{A}$  而  $Y = \bar{B}$ 。于是,

$$f = \overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B$$

12.16 用卡诺图简化  $f = A \cdot (A + B) + B \cdot (\bar{A} + B)$ 。

首先, 必须以正则形式(无组合项)布尔表达式来表示  $f$ :

$$f = A + A \cdot B + \bar{A} \cdot B + B$$

编制卡诺图:

	$\bar{B}$	$B$
$A$	1	1
$\bar{A}$	0	1

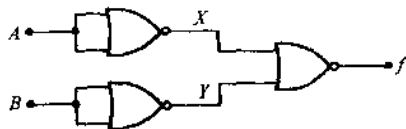


图 12-11

检查这个图, 可看出  $f = A + B$ 。

12.17 通过利用卡诺图简化  $f = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$ 。

编制了三变量右图所示。

以  $f = \bar{A} \cdot C$  描述两个 1 的图样。

12.18 编制卡诺图并简化

$$f = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$$

给出图为

	$\bar{B}$	$\bar{B}$	$B$	$B$
$A$	0	0	0	0
$\bar{A}$	0	1	1	0
	$\bar{C}$	$C$	$C$	$\bar{C}$

	$\bar{B}$	$\bar{B}$	$B$	$B$
$A$	1	0	0	0
$A$	1	0	0	0
$\bar{A}$	1	0	0	0
$\bar{A}$	1	0	0	0
	$\bar{C}$	$C$	$C$	$\bar{C}$

以  $f = \bar{B} \cdot \bar{C}$  描述 1 的列。

12.19 将布尔函数  $f = A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D$  化简为较简单的表达式。

由卡诺图(见下页), 以  $f = C \cdot D$  可以表示 1 的图样。

12.20 当相加的二进制数多于一个数位时, 例 12.6 的半加器没有提供一个装置去设想来自各数位列相加的可能进位, 以达到这个加法运算的正确。能够处理来自前级加法进位的二进制加法器称为全加器。试将表 12-2 扩大, 提供输入  $A$ 、 $B$  和一个来自紧接前级的进位输入  $C_i$ , 由此导出全加器真值表。

只要进位输入  $C_i = 0$ , 输出就与半加器真值表 12-2 是相同的。但是当  $C_i = 1$  时, 只要  $A$  或  $B$  不是零, 必定产生一个进位输出。表 12-3 描述了全加器的运算。



	$\bar{B}$	$\bar{B}$	$B$	$B$	
$A$	0	0	0	0	$D$
$A$	0	1	1	0	$D$
$\bar{A}$	0	1	1	0	$D$
$\bar{A}$	0	0	0	0	$\bar{D}$
	$\bar{C}$	$C$	$C$	$\bar{C}$	

(题 12.19 卡诺图)

表 12-3 全加器

输入			输出	
$A$	$B$	$C_i$	$S$	$C_o$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

- 12.21 根据表 12-3, (a)写出描述当和  $S=1$  时全部条件的布尔函数  $S$ , (b)写出描述当输出进位  $C_o=1$  时全部条件的布尔函数  $C_o$ ; (c)画出模拟全加器的逻辑电路。

(a) 当  $S=1$  时有四个条件给自

$$S = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}_i + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}_i + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C_i + A \cdot B \cdot C_i \quad (1)$$

应用表 12-1 的定理 3(a),

$$S = (\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}_i + (\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \cdot C_i \quad (2)$$

定义  $\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$  为  $A \oplus B$ , 定义  $\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$  为  $A \odot B$ 。但是“异或非”逻辑是“异或”逻辑的补, 而(2)可以再写为

$$S = (A \oplus B) \cdot \bar{C}_i + (\overline{A \oplus B}) \cdot C_i \quad (3)$$

但是由于  $X \cdot \bar{Y} + \bar{X} \cdot Y = X \oplus Y$ , (3)变为

$$S = (A \oplus B) \oplus C_i \quad (4)$$

(b) 当  $C_o=1$  时的四个条件给自

$$C_o = A \cdot B \cdot \bar{C}_i + \bar{A} \cdot B \cdot C_i + A \cdot \bar{B} \cdot C_i + A \cdot B \cdot C_i \quad (5)$$

用表 12-1 的定理 1(a)和 3(a),

$$C_o = A \cdot B \cdot (\bar{C}_i + C_i) + (\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}) \cdot C_i \quad (6)$$

利用表 12-1 的定理 8(a)并认出  $\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$  为“异或”逻辑, 可以将(6)写为

$$C_o = A \cdot B + (A \oplus B) \cdot C_i \quad (7)$$

(c) 根据(4)和(7), 在图 12-12 中画出了全加器逻辑电路。

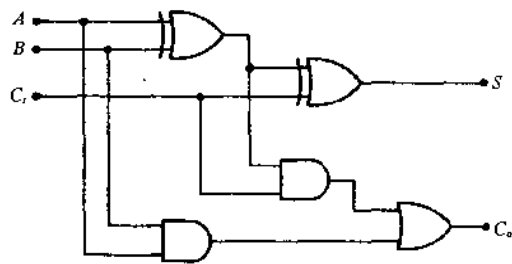


图 12-12

### 补充习题

- 12.22 利用表 12-1 的定理以代数方式简化  $f = A \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C_o$ 。

答  $f = A \cdot C$

- 12.23 用代数法简化  $f = A + \bar{A} \cdot B$ 。

答  $f = B + A$

- 12.24 用代数变换简化  $f = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C_o$ 。

答  $f = \bar{A} \cdot C$

- 12.25 用代数法简化  $f = A + B + \bar{A}$ 。

答  $f = 1$

12.26 用完全归纳的方法证明表 12-1 的定理 6(b),  $A \cdot (A + B) = A$ 。

答

$A$	$B$	$A + B$	$A \cdot (A + B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

12.27 用完全归纳的方法证明表 12-1 的定理 9(a),  $A + \bar{A} \cdot B = A + B$ 。

答

$A$	$B$	$\bar{A}$	$A \cdot B$	$A + \bar{A} \cdot B$	$A + B$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

12.28 用完全归纳的方法证明表 12-1 的定理 10(a),  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ 。

答

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

12.29 用完全归纳的方法证明表 12-1 的定理 10(b),  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ 。

答

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

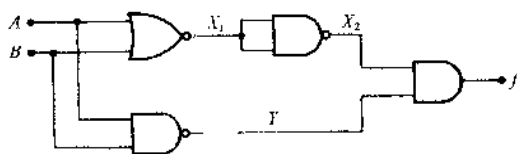


图 12-13

12.30 证明图 12-13 的逻辑电路与图 12-6 的逻辑电路模拟同样的布尔函数。

12.31 仅用“与非”门实现布尔函数  $f = A \cdot B$ 。

答 见图 12-14。

12.32 如果图 12-10 的逻辑电路是可用的,试描述一种连接法来实现布尔函数  $f = A \cdot B + C \cdot D + E$ 。

答 将“与非”门 3 的两个输入连在一起去接受信号 E 而让其余全不改变。

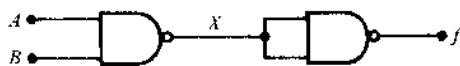


图 12-14

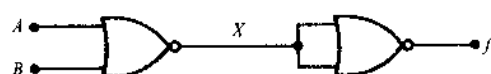


图 12-15

12.33 仅使用“或非”门描绘  $f = A + B$  的实现。

答 见图 12-15。

12.34 构成两个不同的逻辑电路来模拟布尔函数  $f = (A + B) \cdot \bar{C}$ 。

答 见图 12-16。

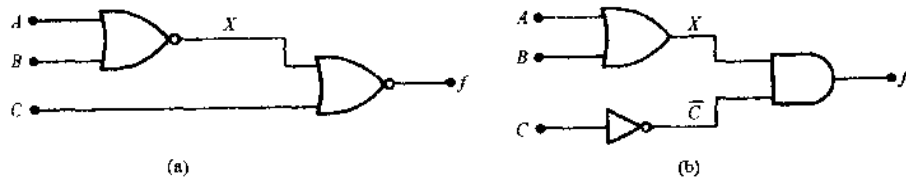


图 12-16

12.35 利用卡诺图简化  $f = B \cdot (A + \bar{B})$ 。

答  $f = A \cdot B$

	$\bar{B}$	$B$
$A$	0	1
$\bar{A}$	0	0

12.36 利用卡诺图简化  $f = A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ 。

答  $f = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

	$\bar{B}$	$\bar{B}$	$B$	$B$
$A$	1	1	0	0
$\bar{A}$	0	0	1	1
	$\bar{C}$	$C$	$C$	$\bar{C}$

12.37 编制  $f = A \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C$  的卡诺图并写出  $f$  的简化表达式。

答  $f = A \cdot C$

	$\bar{B}$	$\bar{B}$	$B$	$B$
$A$	0	1	1	0
$\bar{A}$	0	0	0	0
	$\bar{C}$	$C$	$C$	$\bar{C}$

12.38 证明图 12-17 的两个互连半加器和“或”门模拟表 12-3 所描述全加器的逻辑。

12.39 绘图说明怎样将半加器与全加器级联连接起来,以执行两个二位二进制数的并行加法  $A_2A_1 + B_2B_1 = C_3S_2S_1$ 。所得的电路称为脉动进位加法器。

答 见图 12-18。

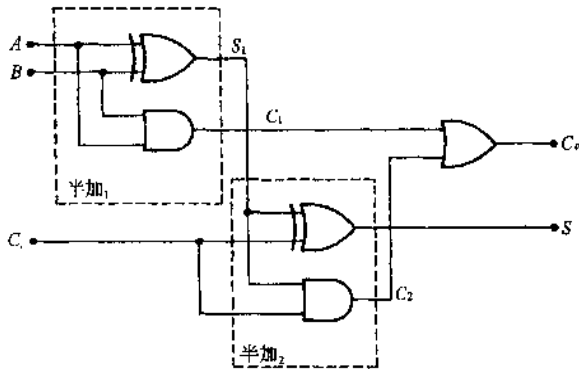


图 12-17

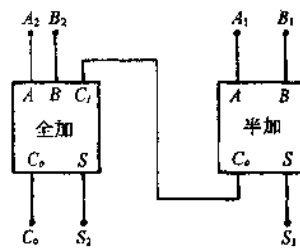


图 12-18

### 13.1 磁路

正如电路是电流的路径一样,磁路就是磁通的路径。变压器、电机,以及许多其他的机电装置都要利用磁路。

磁感应强度或磁通密度  $B$  是以力的方程来定义的:

$$F = BIl \quad (13.1)$$

式中  $F(\text{N})$  就是长度  $l(\text{m})$  传导电流  $I(\text{A})$  且取向与磁通密度  $B(\text{T})$  的匀强磁场成直角的直导线所受的力。换言之,如果导线为  $1\text{m}$  长,传导  $1\text{A}$  电流,当取向与平行磁通线成直角时受到  $1\text{N}$ ,则磁通密度为  $1\text{T}$ 。实际上磁感应强度是量值为  $B$  且方向为磁通线切向的矢量  $\mathbf{B}$ 。如果在面积为  $A$  的面上  $\mathbf{B}$  是均匀的且处处垂直于该面,磁通  $\varphi$  就确定为

$$\varphi = BA \quad \text{或} \quad B = \frac{\varphi}{A} \quad (13.2)$$

磁通的单位是韦伯(Wb)。由式(13.2)可知  $1\text{T} = 1\text{Wb}/\text{m}^2$ 。

磁通量的源是永久磁铁或电流。为了计量电流产生磁场(或磁通)的效应,我们将磁动势  $\mathcal{F}$  的概念,定义为

$$\mathcal{F} = NI \quad (13.3)$$

式中  $I$  是一个  $N$  匝线圈中流过的电流, $\mathcal{F}$  的单位是安匝(At)。在图 13-1 中表示了具有磁动势和磁通的磁路示意图。

磁路的(构成变压器或电机的)磁心材料通常是铁磁性的,并用一个饱和曲线描绘  $B$  随  $H$  (磁场强度,单位为  $\text{A}/\text{m}$  或  $\text{At}/\text{m}$ ) 的变化,如图 13-2 中所示。对于曲线斜率接近为恒定的 II 区,可以写出

$$B = \mu H \quad (13.4)$$

式中  $\mu(\text{H}/\text{m})$  定义为材料的磁导率。当为真空(或空气)时  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H}/\text{m}$ 。

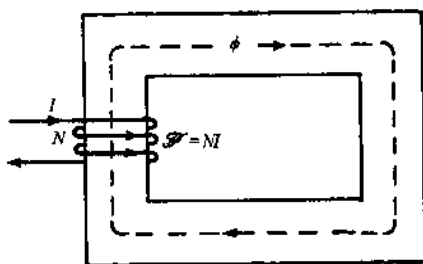


图 13-1

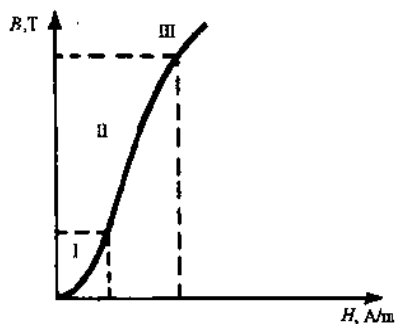


图 13-2

磁路遵守欧姆定律的模拟;表 13-1 示出了磁路与直流电阻电路之间的完全模拟,表中  $l$  是电路中电流路径的长度或磁路中磁通路径的长度,  $A$  是电路中电流路径的横截面积或磁路中磁通路径的横截面积。根据这个模拟,电阻的串联法则或并联法则也适用于磁阻。

表 13-1

直流电阻电路	磁 路
电流 $I$	磁通 $\varphi$
电压 $V$	磁动势 $\mathcal{F}$
电导率 $\sigma$	磁导率 $\mu$
欧姆定律 $I = V/R$	$\varphi = \mathcal{F}/\mathcal{R}$
电阻 $R = l/\sigma A$	磁阻 $\mathcal{R} = l/\mu A$
电导 $G = 1/R$	磁导 $\mathcal{G} = 1/\mathcal{R}$

直流电阻电路与磁路之间的区别是:(1)电阻中具有  $I^2 R$  损耗但磁阻中没有  $\varphi^2 \mathcal{R}$  损耗;(2)磁通引起漏磁路径如图 13-3 中的  $\varphi_l$ , 而电流(流经电阻的)没有;(3)由图 13-2 的  $B-H$  特性,磁路是非线性的;(4)在具有气隙的磁路中要遇到磁通线的边缘通量(图 13-3),但在电路中没有电流的边缘通量。边缘通量随着气隙的长度而增加,并且增大气隙的有效横截面积。

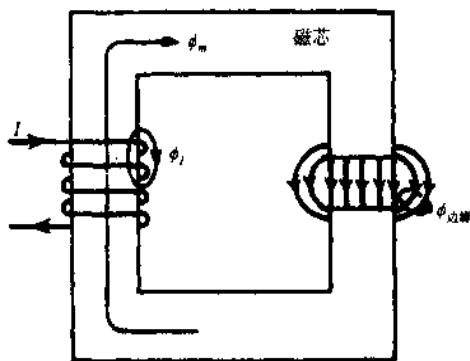


图 13-3

在 1.3 节中曾导出了作为电路元件的电感

$L$ 。另一方面,可以使电感与磁路(或场)的量联系起来。于是,重新定义  $N$  匝线圈的电感为每单位电流的磁链  $\lambda$ :

$$L \equiv \frac{\lambda}{i} \equiv \frac{N\varphi}{i} \quad (13.5)$$

在式(13.5)中,  $\varphi$  是穿过每一匝的磁通(或每匝的平均磁通)。电感的单位是亨利(H)。

对于具有  $n$  个各别线圈的磁路,可以由

$$\begin{aligned} L_{pq} &\equiv \frac{\text{归因于第 } q \text{ 线圈电流的第 } p \text{ 线圈磁链}}{\text{第 } q \text{ 线圈电流}} \\ &\equiv \frac{N_p(k_{pq}\varphi_q)}{i_q} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (13.6)$$

定义  $n^2$  个电感,式中  $N_p$  是第  $p$  线圈匝数,第  $p$  与第  $q$  线圈之间的耦合系数  $k_{pq}$  定义为由第  $q$  线圈产生并耦合于第  $p$  线圈磁通所占份额。当  $p \neq q$  时,  $L_{pq}$  称为线圈  $p$  与  $q$  之间的互感;当  $p = q$  时,  $L_{pp}$  是线圈  $p$  的自感。如果这  $n$  个线圈传导电流  $i_1, i_2, \dots, i_n$ ,则可以证明在各电感中贮存的能量由

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n L_{pq} i_p i_q \quad (13.7)$$

给出。进一步可以证明,以磁场的量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  形式表达的同样能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} \mu \int_v H^2 dv = \frac{1}{2\mu} \int_v B^2 dv \quad (13.8)$$

### 13.3 变压器工作

变压器是具有两个或更多相互耦合绕组(共用一个公共磁路)的电磁装置。图 13-4 表示了一个二绕组理想变压器;变压器理想的意义是,它的磁心是无损耗的且是无限导磁的,没有漏磁通,它的绕组没有损耗。

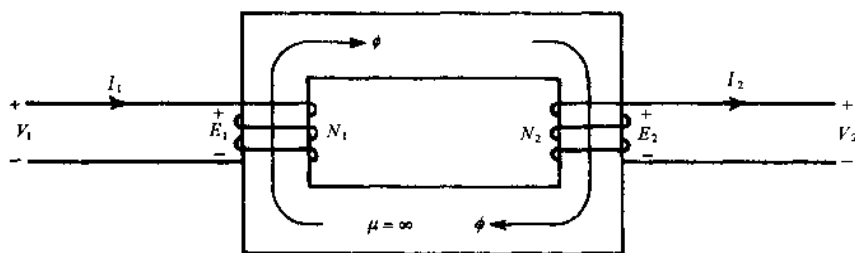


图 13-4

在图 13-4 中,基本的部分是磁心、初级绕组  $N_1$ 、次级绕组  $N_2$ 。如果  $\varphi$  是穿过  $N_1$  和  $N_2$  每匝的互(或磁芯)磁通,于是依据电磁感应的法拉第定律,在  $N_1$  和  $N_2$  中感应的电动势  $e_1$  和  $e_2$  给自

$$e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt}, \quad e_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (13.9)$$

$e$  的方向是要产生一个电流以致引起一个磁通来反抗磁通变化  $d\varphi$  (楞次定则)。由式(13.9)可知,  $e_1/e_2 = N_1/N_2$ , 或以方均根值的形式,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \equiv a \quad (13.10)$$

式中  $a$  是匝比。

由于变压器是理想的,故而图 13-4 中  $e_1 = v_1$ ,  $e_2 = v_2$ ; 由此磁通与电压以

$$\varphi = \frac{1}{N_1} \int v_1 dt = \frac{1}{N_2} \int v_2 dt \quad (13.11)$$

联系起来。

如果磁通以正弦形式变化,  $\varphi = \varphi_m \sin \omega t$ , 则在一个  $N$  匝绕组中对应的感应电压  $e$  由

$$e = \omega N \varphi_m \cos \omega t \quad (13.12)$$

给出,而这个感应电压的方均根值为

$$E = \frac{\omega N \varphi_m}{\sqrt{2}} = 4.44 f N \varphi_m \quad (13.13)$$

此式被通称为电动势方程。式(13.13)中的  $f = \omega/2\pi$  是以 Hz 计的磁通频率。

#### 13.4 电压变换、电流变换、阻抗变换

变压器用于实现电压、电流、阻抗的变换和形成隔离(即免除一些电路之间的直接相连)。

13.3 节导出了理想变压器的电压变换性质:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = a \quad (13.14)$$

式中下标 1 和 2 分别对应于初级边和次级边。

当为理想变压器时,环绕其磁路的净磁动势是零。于是  $N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0$  即

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \equiv a \quad (13.15)$$

由式(13.14)和式(13.15)可以证明,如果阻抗  $Z_2$  连接到次级,则在初级看到的阻抗  $Z_1$  满足

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \equiv a^2 \quad (13.16)$$

#### 13.5 非理想变压器

非理想(或实际)变压器与理想变压器不同之处在于,前者具有(磁芯的)磁滞损耗和涡流

损耗,而且在它的初级绕组和次级绕组中有电阻( $I^2R$ )损耗。此外,非理想变压器的磁芯不是完全导磁性的,而对于它的磁化需要一个有限的磁动势。由于漏磁,在非理想变压器中也不是全部磁通同时与初级绕组、次级绕组相耦合。

### 13.6 等效电路

图 13-5(a)示出了理想变压器的等效电路。当计入了绕组电阻、漏磁电抗、磁化电抗、磁芯损耗的(非理想的)作用后,就得到图 13-5(b)所示电路,其中用一个理想变压器将初级与次级耦合起来。利用式(13.4)、式(13.5)、式(13.6),可以将理想变压器从图 13-5(b)中消除掉,而总的等效电路可以是相对于初级的如图 13-6(a),或相对于次级的如图 13-6(b)。

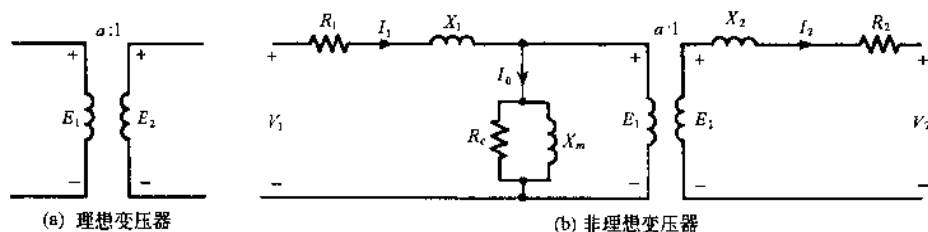


图 13-5

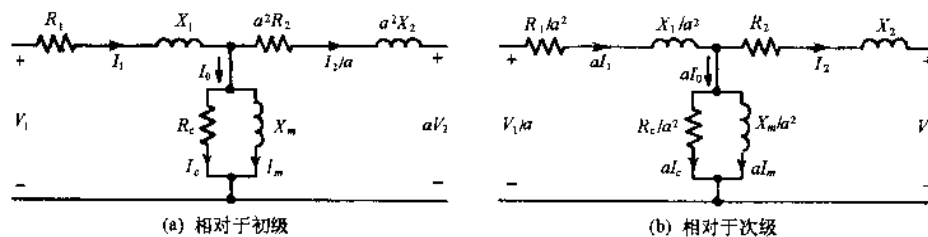


图 13-6 非理想变压器的等效电路

在图 13-7 中示出了按滞后功率因数情况下图 13-6(a)电路的相量图。在图 13-5、13-6、13-7 中,变量符号为

- $a$  ≡ 匝比
- $E_1$  ≡ 初级感应电压
- $E_2$  ≡ 次级感应电压
- $V_1$  ≡ 初级端点电压
- $V_2$  ≡ 次级端点电压
- $I_1$  ≡ 初级电流
- $I_2$  ≡ 次级电流
- $I_0$  ≡ 无载(初级)电流
- $R_1$  ≡ 初级绕组电阻
- $R_2$  ≡ 次级绕组电阻
- $X_1$  ≡ 初级漏磁电抗
- $X_2$  ≡ 次级漏磁电抗
- $I_m, X_m$  ≡ 磁化电流和磁化电抗
- $I_c, R_c$  ≡ 计及磁芯损耗的电流和电阻

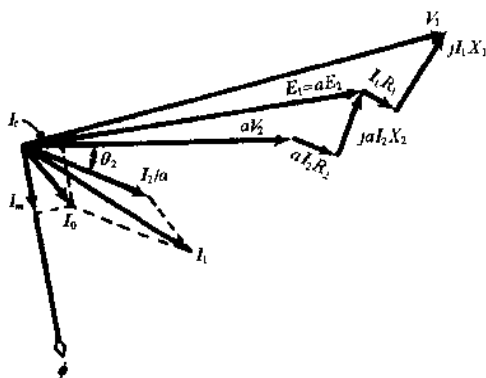


图 13-7

### 13.7 变压器试验

由 13.6 节的等效电路能够获得变压器的性能特征。由设计数据或由试验数据都可求得

电路的特性。两个常用的试验如下。

#### 开路(无载)试验

这时有一个绕组是开路的,而将电压——经常是额定频率的额定电压——施加至另一个绕组。测量这个绕组端点处的电压、电流、功率,并且测量第二绕组的开路电压,由这个测量能够获得对匝比的核验。当一个绕组的额定电压等于可用电源的额定电压时,将试验电压施加至这个绕组常是很方便的。对于升压变压器,这种方式下第二绕组的开路电压将高于施加电压,而且往往会高出很多。必须注意防护这个绕组的端点,以保证试验人员的安全,并防止这些端点靠近其他电路、仪表、地线等等。

在所提出的可由试验数据获得的无载特性中,假定电压施加至初级且将次级开路。无载功率损耗等于这个试验中的功率表读数;减去初级中的电阻性损耗就可得出磁芯损耗,在多数情况下这个初级电阻损耗通常很小且可忽略。于是,如果  $P_0$ 、 $I_0$ 、 $V_0$  是输入功率、电流、电压,则磁芯损耗由式

$$P_c = P_0 - I_0^2 R_1 \quad (13.17)$$

给出。按相量形式的初级感应电压为

$$\mathbf{E}_1 = V_0 \angle 0^\circ - (I_0 \angle \theta_0)(R_1 + jX_1) \quad (13.18)$$

式中  $\theta_0 \equiv$  无载功率因数角  $= \cos^{-1}(P_0/V_0 I_0) < 0$ 。其他的电路量由式

$$R_c = \frac{E_1^2}{P_c}, \quad I_c = \frac{P_c}{E_1}, \quad I_m = \sqrt{I_0^2 - I_c^2}, \quad X_m = \frac{E_1}{I_m}, \quad a \approx \frac{V_0}{E_2} \quad (13.19)$$

求出。

#### 短路试验

在这个试验中,有一个绕组被跨过其端点短路,并且将减低的电压施加至另一个绕组。这个减低的电压量值是要使特定的电流值——通常是额定电流——流过短路绕组。另外,短路绕组的选取通常依适用的测量设备来确定。由于短路绕组将作为表达在试验中所获得阻抗分量的参考绕组,必须注意它的标记。在这里次级短路并将减低的电压施加至初级。

当很低的电压施加至初级绕组时,磁芯损耗电流和磁化电流变得很小,而等效电路简化成为图 13-8。于是,如果  $P_s$ 、 $I_s$ 、 $V_s$  是短路试验之下的输入功率、电流、电压,则相对于初级的,有

$$Z_s = \frac{V_s}{I_s} \quad (13.20)$$

$$R_1 + a^2 R_2 \equiv R_s = \frac{P_s}{I_s^2} \quad (13.21)$$

$$X_1 + a^2 X_2 \equiv X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2} \quad (13.22)$$

已知  $R_1$  和  $a$ , 就可以由式(13.21)求出  $R_2$ , 通常假定式(13.22)中的漏磁电抗在初级与次级之间平均分配, 即

$$X_1 = a^2 X_2 = \frac{1}{2} X_s \quad (13.23)$$

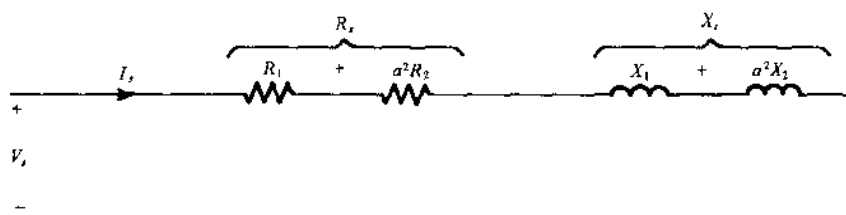



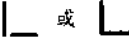














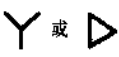

图 13-8



13.8 变压器连接

在表 13-2 中示出了九种型式的变压器连接法,前面七种是为了电压变换的目的,后面两种是为了相数的改变(未包括单相变压器)。图中的每个线段对应于变压器的一个绕组。

表 13-2

连接型式	初 级	次 级
二相		
三相三角形-三角形		
三相三角形-星形		
三相星形-三角形		
三相星形-星形		
三相开口三角形		
三相 T 形		
二相变三相(斯科特)		
三相变六相(径向的)		

在多相变压器的连接中,观察极性标记是很重要的,图 13-9 以一些细部表示了三个相同的变压器按三角形-星形的连接法。

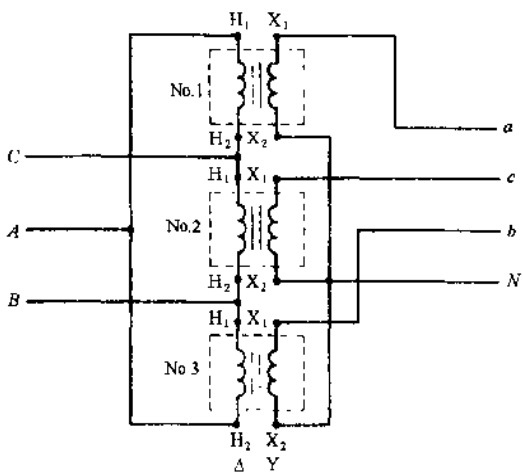


图 13-9

### 13.9 自耦变压器

自耦变压器是一种单绕组变压器,对于某些应用,由于它比多绕组变压器简单且价格相对较低,因而得到广泛的使用。然而由于它不提供电的隔离,因此不能用在需要这种性能的地方。图 13-10 的自耦变压器电路可以由一个两绕组变压器推导出来,将两个绕组在电气上串

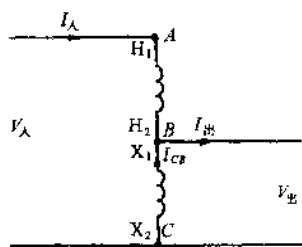


图 13-10

联连接以使极性是叠加的。假设在图 13-10 的电路中已经这样做了,图中两绕组变压器的初级是绕组 AB 而次级是绕组 BC。现在这个自耦变压器的初级是这两个绕组的和 AC,而次级是绕组 BC。因而,这个自耦变压器的电压比和匝比是

$$a' = \frac{E_{AB} + E_{BC}}{E_{BC}} = \frac{N_{AB} + N_{BC}}{N_{BC}} = a + 1 \quad (13.24)$$

式中  $a$  是原来两绕组变压器的电压比和匝比。按自耦变压器连接的一对绕组与按两绕组变压器连接的绕组相比,除了提供更大的变压比之外,还能传送更多的伏安(视在功率)。其理由是在自耦变压器中视在功率由初级到次级的转移不仅是像两绕组变压器那样用到感应,而且还用到导电。

### 例题解答

13.1 图 13-11(a) 示出了一个变截面的复合磁路;铁的部分具有图 13-11(b) 的  $B-H$  特性。已知:  $N = 100$  匝;  $l_1 = 4l_2 = 40\text{cm}$ ;  $A_1 = 2A_2 = 10\text{cm}^2$ ;  $l_g = 2\text{mm}$ ; 漏磁通  $\varphi_1 = 0.01\text{mWb}$ 。试算出为建立  $0.6\text{T}$  气隙磁通密度所需的  $I$ 。

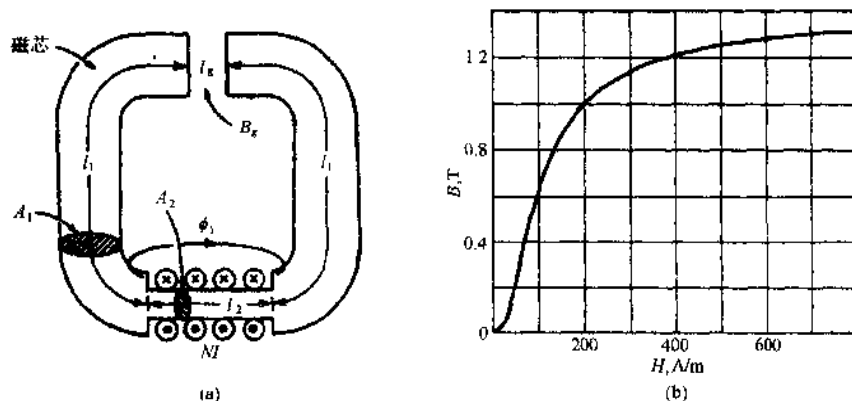


图 13-11

对应于  $B_g = 0.6\text{T}$ ,

$$H_g = \frac{0.6}{\mu_0} = 4.78 \times 10^5 \text{ A/m}$$

$$\mathcal{F}_g = (4.78 \times 10^5) \times (2 \times 10^{-3}) = 956 \text{ At}, \quad B_{l1} = B_g = 0.6\text{T}$$

由图 13-11(b), 在  $B = 0.6\text{T}$  处  $H = 100\text{A/m}$ 。于是, 对于两个长度  $l_1$ ,

$$\mathcal{F}_{l_1} = 100 \times (0.40 + 0.40) = 80 \text{ At}$$

气隙中的磁通是

$$\varphi_g = B_g A_1 = 0.6 \times (10 \times 10^{-4}) = 0.6\text{mWb}$$

由线圈产生的总磁通是气隙磁通与漏磁通的和:

$$\varphi_c = \varphi_g + \varphi_1 = 0.6 + 0.01 = 0.61\text{mWb}$$

因此, 在  $l_2$  部分中的磁通密度是

$$B_2 = \frac{\varphi_c}{A_2} = \frac{0.61 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}} = 1.22\text{T}$$

对于这个磁通密度,由图 13-11(b)得  $H = 410\text{A/m}$ , 而

$$\mathcal{F}_{12} = 410 \times 0.10 = 41\text{At}$$

所需的总磁动势于是为

$$\mathcal{F}_g + \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12} = 956 + 80 + 41 = 1077\text{At}$$

并且对于  $N = 100$  匝,所需电流是

$$I = \frac{1077}{100} = 10.77\text{A}$$

- 13.2 画出图 13-11(a)所示磁路的电模拟。

见图 13-12。

- 13.3 计算图 13-11(a)中所示线圈的总自感和漏感。

由题 13.1, 线圈产生的总磁通是  $\varphi_c = 0.61\text{mWb}$  且  $I = 10.77\text{A}$ 。因此

$$L = \frac{N\varphi_c}{I} = \frac{100 \times (0.61 \times 10^{-3})}{10.77} = 5.66\text{mH}$$

$$L_1 = \frac{N\varphi_1}{I} = \frac{100 \times (0.01 \times 10^{-3})}{10.77} = 0.093\text{mH}$$

- 13.4 求出图 13-11(a)磁路的铁中和气隙中贮存的磁能。忽略在漏磁通空气部分中贮存的很小能量。

由式(13.8),

$$W_{\text{气}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \times \text{体积}_{\text{气}} = \frac{(0.6)^2}{2\mu_0} (10 \times 10^{-4}) \times (2 \times 10^{-3}) = 0.286\text{J}$$

由式(13.7)和题 13.4,

$$W_{\text{铁}} = \frac{1}{2} LI^2 - W_{\text{气}} = \frac{1}{2} N\varphi_c I - W_{\text{气}} = 0.328 - 0.286 = 0.042\text{J}$$

注意  $W_{\text{气}} \gg W_{\text{铁}}$ 。

- 13.5 要求工作于 110V、60Hz 的变压器中有最大铁心磁通 4.13mWb。试求所需的初级匝数。

由电动势方程式(13.13),

$$N_1 = \frac{E_1}{4.44\varphi_m f} = \frac{110}{4.44 \times (4.13 \times 10^{-3}) \times 60} = 100 \text{ 匝}$$

- 13.6 一个 50Hz 的变压器在 1.5A 且 120V 时吸收 75W 功率。如果初级绕组的电阻为 0.4Ω, 试求(a)铁心损耗, (b)无载功率因数。

$$(a) \quad P_c = 75 - (1.5)^2 \times 0.4 = 74.1\text{W}$$

$$(b) \quad \cos\theta_0 = \frac{75}{120 \times 1.5} = 0.417 \text{ 滞后}$$

- 13.7 试用  $R_c$  和  $X_m$  的并联组合表示出题 13.6 变压器的铁心, 并求出它们的数值。(完全忽略初级绕组的作用)。

$$R_c = \frac{(120)^2}{75} = 192\Omega, \quad I_m = \sqrt{(1.5)^2 - (0.625)^2} = 1.36\text{A}$$

$$I_c = \frac{120}{192} = 0.625\text{A}, \quad X_m = \frac{120}{1.36} = 88\Omega$$

- 13.8 图 13.6 中表示的 150kVA、2400V/240V 变压器等效电路参数为  $R_1 = 0.2\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{m}\Omega$ ,  $X_1 = 0.45\Omega$ ,  $X_2 = 4.5\text{m}\Omega$ ,  $R_c = 10\text{k}\Omega$ ,  $X_m = 1.55\text{k}\Omega$ 。试利用相对于初级的等效电路, 求出工作于额定负载且有 0.8 滞后功率因数下, 变压器的(a)电压调整率, (b)效率。

见图 13-6(a)和 13-7。已知  $V_2 = 240\text{V}$ ,  $a = 10$ ,  $\theta_2 = \arccos 0.8 = -36.8^\circ$ ,

$$aV_2 = 2400 \angle 0^\circ \text{V}$$

$$I_2 = \frac{150 \times 10^3}{240} = 625\text{A}, \quad \frac{I_2}{a} = 62.5 \angle -36.8^\circ = 50 - j37.5\text{A}$$

又因为

$$a^2 R_2 = 0.2 \Omega \text{ 和 } a^2 X_2 = 0.45 \Omega$$

所以

$$\begin{aligned} E_1 &= (2400 + j0) + (50 - j37.5)(0.2 + j0.45) \\ &= 2427 + j15 = 2427 \angle 0.35^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{2427 \angle 0.35^\circ}{1550 \angle 90^\circ} = 1.56 \angle -89.65^\circ = 0.0095 - j1.56 \text{ A}$$

$$I_c = \frac{2427 + j15}{10 \times 10^3} \approx 0.2427 + j0 \text{ A}$$

所以

$$I_0 = I_c + I_m = 0.25 - j1.56 \text{ A}$$

$$I_1 = I_0 + (I_2/a) = 50.25 - j39.06 = 63.65 \angle -37.85^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= (2427 + j15) + (50.25 - j39.06)(0.2 + j0.45) \\ &= 2455 + j30 = 2455 \angle 0.7^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$(a) \quad \text{百分调整率} = \frac{V_{\text{空载}} - V_{\text{负载}}}{V_{\text{负载}}} \times 100\%$$

$$= \frac{V_1 - aV_2}{aV_2} \times 100\% = \frac{2455 - 2400}{2400} \times 100\% = 2.3\%$$

$$(b) \quad \text{效率} = \frac{\text{输出}}{\text{输入}} = \frac{\text{输出}}{\text{输出} + \text{损耗}}$$

现在

$$\text{输出} = (150 \times 10^3)(0.8) = 120 \text{ kW}$$

$$\text{损耗} = I_1^2 R_1 + I_c^2 R_c + I_2^2 R_2$$

$$\begin{aligned} &= (63.65)^2 \times 0.2 + (0.2427)^2 \times (10 \times 10^3) \\ &\quad + (625)^2 \times (2 \times 10^{-3}) = 2.18 \text{ kW} \end{aligned}$$

因此

$$\text{效率} = \frac{120}{122.18} = 0.982 = 98.2\%$$

13.9 在图 13-13 中示出了变压器的一种近似等效电路。试利用这个电路,重复题 13.8 的计算并比较其结果。画出表示全部电压和电流的相量图。

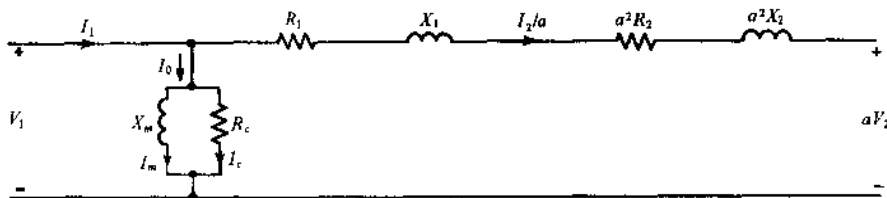


图 13-13

由题 13.8 可知,

$$aV_2 = 2400 \angle 0^\circ \text{ V}, \frac{I_2}{a} = 50 - j37.5 \text{ A}, R_1 + a^2 R_2 = 0.4 \Omega, X_1 + a^2 X_2 = 0.9 \Omega$$

因此,

$$\begin{aligned} V_1 &= (2400 + j0) + (50 - j37.5)(0.4 + j0.9) \\ &= 2453 + j30 = 2453 \angle 0.7^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$I_c = \frac{2453 \angle 0.7^\circ}{10 \times 10^3} = 0.2453 \angle 0.7^\circ \text{ A}$$

$$I_m = \frac{2453 \angle 0.7^\circ}{1550 \angle 90^\circ} = 1.58 \angle -89.3^\circ \text{ A}$$

$$I_0 = 0.2453 - j1.58 \text{ A}$$

$$I_1 = 50.25 - j39.08 = 63.66 \angle -37.9^\circ \text{ A}$$

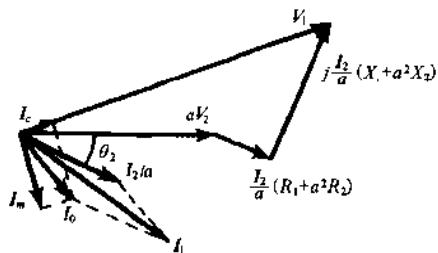


图 13-14

图 13-14 给出了相量图。

$$(a) \quad \text{百分调整率} = \frac{2453 - 2400}{2400} \times 100\% = 2.2\%$$

$$(b) \quad \text{效率} = \frac{120 \times 10^3}{120 \times 10^3 + (63.66)^2 \times 0.4 + (0.2453)^2 (10 \times 10^3)} = 0.982 = 98.2\%$$

注意近似电路得到的结果是足够准确的。

- 13.10 具有匝比为 5 的变压器其电路参数的欧姆值为  $R_1 = 0.5\Omega$ ;  $R_2 = 0.021\Omega$ ;  $X_1 = 3.2\Omega$ ;  $X_2 = 0.12\Omega$ ; 相对于初级的  $R_c = 350\Omega$ ; 相对于初级的  $X_m = 98\Omega$ 。试画出相对于(a)初级和(b)次级的变压器近似等效电路, 表示出电路参数的数值。

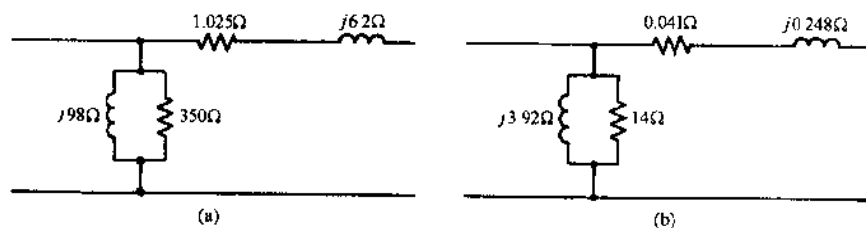


图 13-15

在图 13-15(a)和图 13-15(b)中分别示出了等效电路。计算如下:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad R &= R_1 + a^2 R_2 = 0.5 + 5^2 \times 0.021 = 1.025\Omega \\
 X &= X_1 + a^2 X_2 = 3.2 + 5^2 \times 0.12 = 6.2\Omega \\
 R_c &= 350\Omega \\
 X_m &= 98\Omega \\
 \text{(b)} \quad R &= \frac{R_1}{a^2} + R_2 = \frac{0.5}{25} + 0.021 = 0.041\Omega \\
 X &= \frac{X_1}{a^2} + X_2 = \frac{3.2}{25} + 0.12 = 0.248\Omega \\
 R_c &= \frac{350}{25} = 14\Omega \\
 X_m &= \frac{98}{25} = 3.92\Omega
 \end{aligned}$$

- 13.11 一台 25kVA、440V/220V、60Hz 变压器开路试验和短路试验的结果如下:

开路试验: 初级开路, 在低压边有仪表。输入电压 220V; 输入电流 9.6A; 输入功率 710W。

短路试验: 次级短路, 在高压边有仪表。输入电压 42V; 输入电流 57A; 输入功率 1030W。

试求相对于高压边的精确等效电路(图 13-6)参数。假定  $R_1 = a^2 R_2$  和  $X_1 = a^2 X_2$ 。

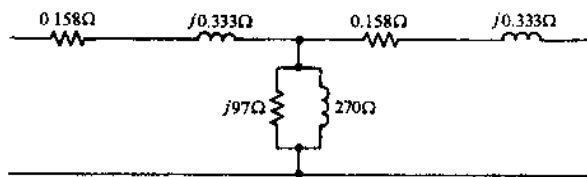


图 13-16

由短路试验:

$$\begin{aligned}
 Z_{s1} &= \frac{42}{57} = 0.737\Omega, \quad R_{s1} = \frac{1030}{57^2} = 0.317\Omega, \\
 X_{s1} &= \sqrt{(0.737)^2 - (0.317)^2} = 0.665\Omega
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 R_1 &= a^2 R_2 = 0.158\Omega, \quad R_2 = 0.0395\Omega \\
 X_1 &= a^2 X_2 = 0.333\Omega, \quad X_2 = 0.0832\Omega
 \end{aligned}$$

由开路试验得

$$\theta_0 = \arccos \frac{710}{9.6 \times 220} = \arccos 0.336 = -70^\circ$$

$$E_2 = 220 \angle 0^\circ - (9.6 \angle -70^\circ)(0.0395 + j0.0832) \approx 219 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_{c2} = \frac{219}{67.5} = 3.24 \text{ A}$$

$$I_{m2} = \sqrt{(9.6)^2 - (3.24)^2} = 9.03 \text{ A}$$

$$P_{c2} = 710 - (9.6)^2 \times 0.0395 \approx 710 \text{ W}$$

$$X_{m2} = \frac{219}{9.03} = 24.24 \Omega$$


$$X_{m1} = a^2 X_{m2} = 97 \Omega$$

$$R_{c2} = \frac{219^2}{710} = 67.5 \Omega$$

$$R_{c1} = a^2 R_{c2} = 270 \Omega$$

因此,这个等效电路具有图 13-16 所标注的参数。

### 13.12 试由题 13.11 的试验数据取得相对于低压边近似等效电路的电路常量。

 这个等效电路具有图 13-15(b)的外形,但是现在

$$R_{c2} = \frac{220^2}{710} = 68.2 \Omega (\text{在 } 14 \Omega \text{ 处})$$

$$I_{c2} = \frac{220}{68.2} = 3.22 \text{ A}$$

$$I_{m2} = \sqrt{(9.6)^2 - (3.22)^2} = 9.04 \text{ A}$$

$$X_{m2} = \frac{220}{9.04} = 24.33 \Omega (\text{在 } 3.92 \Omega \text{ 处})$$

由短路试验数据(见题 13.11)算得的值应当全是相对于次级的。于是

$$R_{c2} = \frac{0.317}{4} = 0.079 \Omega (\text{在 } 0.041 \Omega \text{ 处})$$

$$X_{c2} = \frac{0.665}{4} = 0.166 \Omega (\text{在 } 0.248 \Omega \text{ 处})$$

### 13.13 一个 220V/110V、60Hz 变压器在 220V 当吸收 3.5A<sup>①</sup>电流时有 800W 的无载总损耗。初级绕组的电阻为 0.54Ω。由制造厂的铁心损耗数据求出在 60Hz 时的磁滞损耗为 520W。如果工作电压和频率都加倍,试计算新的铁心损耗。

 以每单位质量为基础给出变压器中铁心损耗的近似公式

$$\text{涡流损耗} \equiv p_e = k_e f^2 B_m^2 (\text{W/kg})$$

$$\text{磁滞损耗} \equiv p_h = k_h f B_m^v (\text{W/kg})$$

式中  $k_e$  和  $k_h$  是材料的常数,  $f$  是交流磁通的频率,  $B_m$  是铁心最大磁通密度, 指数  $v$  的范围由 1.5 至 2.5。现在, 电动势方程(13.13)意味着  $B_m$  是与  $E/f$  成正比的, 于是当工作电压和频率以同样的因数(特殊的以因数 2)增大时  $B_m$  保持恒定。在 220V 和 60Hz, 得到

$$\text{无载 } I^2 R \text{ 损耗} = (3.5)^2 \times 0.54 = 6.6 \text{ W}$$

$$p_h = 520 \text{ W}$$


$$p_e = 800 - (520 + 6.6) = 273.4 \text{ W}$$

因此, 在 440V 和 120Hz,

$$P_h = 2 \times 520 = 1040 \text{ W}, \quad P_e = 2^2 \times 273.4 = 1094 \text{ W}$$

而新的铁心损耗是 1040 + 1094 = 2134W。

### 13.14 具有相对于各自初级等效阻抗 $Z_1'$ 和 $Z_2'$ 的两个变压器, 在次级端电压 $V_2$ 和初级端电压 $V_1$ 下并联工作[图 13-17(a)]。变压器有 $a$ 和 $a'$ 作为它们各自的匝比。如果初级总电流为 $I_1$ , 试求两个变压器怎样分担这个负载。忽略铁心损耗和磁化电流。

 图 13-17(b)表示了二个并联变压器的等效电路, 由此得到如下相量关系:

$$V_1 = V_1' = a' V_2 + I_1' Z_1'$$

①  $3.5 \times 220 < 800$ , 数据似乎有问题。——译者注

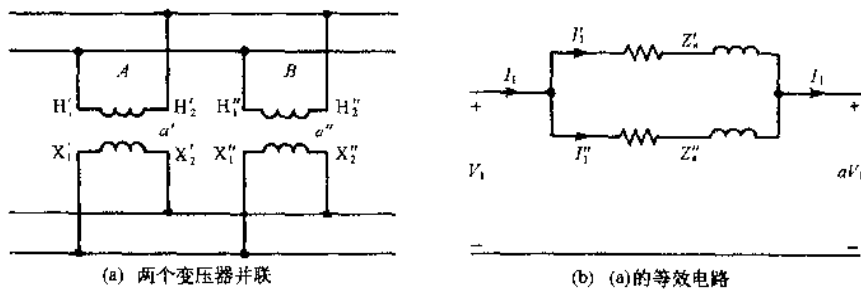


图 13-17

$$V_1 = V_1' = a' V_2 + I_1' Z_e'$$

$$I_1 = I_1' + I_1''$$

前两个方程相减, 然后与第三方程联立求解, 得到两个负载电流

$$I_1' = \frac{-V_2(a' - a') + I_1' Z_e'}{Z_e' + Z_e'} \quad I_1'' = \frac{V_2(a' - a') + I_1' Z_e'}{Z_e' + Z_e'}$$

- 13.15 每个额定 100kVA、11000V/2300V、60Hz 的两个变压器, 在初级边和次级边都按开口三角形型式连接起来。(a) 由这个变压器组可以向什么样的总负载供电? (b) 将一个 120kVA, 2300V, 0.866 滞后功率因数三相三角形连接负载连接至这个变压器组。高压边的线电流是多大?

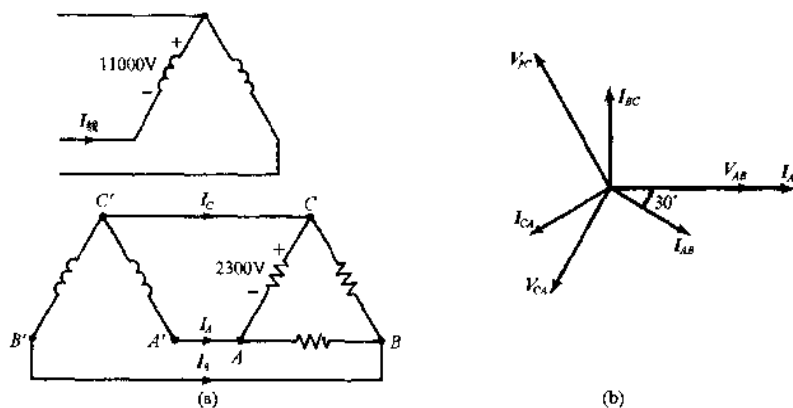


图 13-18

(a) 开口三角形连接负载①

$$\approx \sqrt{3} \times (\text{每个变压器的额定 kVA})$$

$$\approx \sqrt{3} \times 100 = 173.2 \text{ kVA}^\text{①}$$

(b) 在图 13-18 中示出了这个电路和相量图。对于三角形连接负载,

$$I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = \frac{1}{3} \left( \frac{120 \times 10^3}{2300} \right) = 17.4 \text{ A}$$

由图 13-18(b) 相量图,

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = \left( 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 17.4 \right) \angle 0^\circ = 30.12 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\text{变压比 } a = \frac{11000}{2300} = 4.78$$

$$I_{\text{线}} = 11000 \text{ V 绕组中电流} = \frac{30.12}{4.78} = 6.3 \text{ A}$$

- 13.16 要将一台 25Hz、120V/30V、500VA 变压器用于 60Hz 电源。如果铁心磁通密度要保持不

① 似乎应该是  $2 \times 100 \text{ kVA}$ 。——译者注

变, 试求出 (a) 最大容许初级电压, (b) 新的 (60Hz) 额定次级电压和电流。

■ (a) 由电动势方程, 初级电压将随频率成正比而变。因此,

$$\text{最大初级电压} = \frac{60}{25} \times 120 = 288\text{V}$$

$$(b) \quad \text{额定 } V_2 = \frac{60}{25} \times 30 = 72\text{V}$$

$$\text{额定 } I_2 = \frac{500}{30} = 16.67\text{A (与 25Hz 时相同)}$$

13.17 如果已将一个量除以选定的基本量 (具有同样的物理量纲), 就是按每单位表示了它。假设对于一个 10kVA、2400V/240V 变压器选定

$$P_{\text{基}} = 10\text{kW}, \quad V_{1\text{基}} = 2400\text{V}, \quad V_{2\text{基}} = 240\text{V}$$

这个变压器有如下试验数据:

开路试验 (在低压边测): 240V, 0.8A, 80W

短路试验 (在高压边测): 80V, 5.1A, 220W

试将全部试验数据变换成按每单位的值, 并求出按每单位的串联等效电阻。

$$\text{■} \quad I_{1\text{基}} = \frac{10 \times 10^3}{2400} = 4.17\text{A}, \quad I_{2\text{基}} = 41.7\text{A}$$

按每单位 (pu), 开路数据为

$$V_0 = \frac{240}{240} = 1\text{pu}, \quad I_0 = \frac{0.8}{41.7} = 0.019\text{pu}, \quad P_0 = \frac{80}{10 \times 10^3} = 0.008\text{pu}$$

短路数据为

$$V_s = \frac{80}{2400} = 0.0333\text{pu}, \quad I_s = \frac{5.1}{4.17} = 1.22\text{pu}, \quad P_s = \frac{220}{10 \times 10^3} = 0.022\text{pu}$$

等效电阻是

$$R_e = \frac{P_s (\text{pu})}{[I_s (\text{pu})]^2} = \frac{0.022}{(1.22)^2} = 0.0148\text{pu}$$

13.18 现试验一台 75kVA、230V/115V、60Hz 变压器, 得到如下结果:

短路试验: 9.5V, 326A, 1200W

开路试验: 115V, 16.3A, 750W

试求出 (a) 以高压表示的等效阻抗, (b) 按每单位的等效阻抗, (c) 在 0.8 滞后功率因数额定负载下的电压调整率, (d) 在 0.8 滞后功率因数额定负载下的效率和在全功率因数 1/2 负载下的效率。

$$\text{■} \quad (a) \quad Z_s = \frac{9.5}{326} = 0.029\Omega$$

(b) 如题 13.17,

$$\text{每单位 } V_s = \frac{9.5}{230} = 0.0413\text{pu}$$

$$\text{每单位 } I_s = \frac{326}{326} = 1\text{pu}$$

$$\text{每单位 } Z_s = \frac{V_s (\text{pu})}{I_s (\text{pu})} = \frac{0.0413}{1} = 0.0413\text{pu}$$

$$(c) \quad \text{每单位 } P_s = \frac{1200}{75 \times 10^3} = 0.016\text{pu} = [I_s (\text{pu})]^2 [R_s (\text{pu})]$$

$$\text{于是} \quad R_s = 0.016\text{pu}, \quad X_s = \sqrt{(0.0413)^2 - (0.016)^2} = 0.0384\text{pu}$$

$$V_0 = V + IZ = 1 + (0.8 - j0.6)(0.016 + j0.0384)$$

由此  $V_0 = 1.036\text{pu}$ 。于是,

$$\text{电压调整率} = \frac{V_0 - V_2}{V_2} = \frac{1.036 - 1}{1} = 0.036\text{pu} = 3.6\%$$

$$(d) \quad \eta_{\text{额定负载}} = \frac{(75 \times 10^3) \times 0.8}{60 \times 10^3 + 1200 + 750} = 96.85\%$$



$$\eta_{1/2\text{额定负载}} = \frac{(37.5 \times 10^3) \times 1}{37.5 \times 10^3 + 300 + 750} = 97.27\%$$

- 13.19 一个变压器的铁心具有磁阻  $\mathcal{R}$ , 并在次级跨接电阻  $R$ 。铁心磁通是角频率为  $\omega$  的正弦波形。试求得以  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $\omega$ 、 $R$ 、 $\mathcal{R}$ 、初级感应电压  $E_1$  来表示的初级瞬时电流表达式。

解 写出  $\varphi = \varphi_m \sin \omega t$ , 则

$$e_1 = \omega N_1 \varphi_m \cos \omega t, \quad e_2 = \omega N_2 \varphi_m \cos \omega t \quad (1)$$

次级电流  $i_2$  给自

$$i_2 = \frac{e_2}{R} \quad (2)$$

关于磁路, 有  $\mathcal{F} = \mathcal{R} \varphi$ , 即

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R} \varphi_m \sin \omega t \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3), 经变换整理之后,

$$i_1 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{E_1}{R} \cos \omega t + \frac{E_1 \mathcal{R}}{\omega N_1^2} \sin \omega t$$

- 13.20 关于自耦变压器, 比如图 13-10 中所示的一个, 有  $V_{\lambda} = V_1 = 220\text{V}$ ,  $V_{\text{出}} = V_2 = 110\text{V}$ ,  $I_{\text{出}} = I_2 = 10\text{A}$ 。试将这个自耦变压器与一个在次级供出 10A 电流的 220V/110V 两绕组变压器, 在这两个变压器绕组的需铜方面进行比较。

解 变压器绕组通常是工作于一个特定的电流密度。这使得绕组中铜的重量与安匝(磁动势)成正比。于是对于两绕组变压器,

$$(\text{铜重})_{\text{变}} = k(N_1 I_1 + N_2 I_2) \quad (1)$$

式中  $k$  是一个常数。

在自耦变压器中, 由图 13-10 有:

由 A 至 C 匝数  $= N_1$ , 由 B 至 C 匝数  $= N_2$ , 由 A 至 B 匝数  $= N_1 - N_2$

AB 中电流  $= I_{\lambda} = I_1$ , BC 中电流  $= I_1 - I_2$

这样

$$(\text{铜重})_{\text{自}} = k[(N_1 - N_2)I_1 + N_2(I_1 - I_2)] \quad (2)$$

由(1)和(2), 并由  $N_1/N_2 = I_2/I_1 = a$ , 因此

$$\begin{aligned} \frac{\text{重}_{\text{自}}}{\text{重}_{\text{变}}} &= \frac{(N_1 - N_2)I_1 + N_2(I_1 - I_2)}{N_1 I_1 + N_2 I_2} = 1 - \frac{2N_2/N_1}{1 + (N_2/N_1)(I_2/I_1)} \\ &= 1 - \frac{2/a}{2} = 1 - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\text{节省铜} = \text{重}_{\text{变}} - \text{重}_{\text{自}} = \frac{1}{a} \text{重}_{\text{变}}$$

研究数值, 有

$$\frac{1}{a} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{100}{220} = 0.5$$

即节省 50% 的铜。

### 补充习题

- 13.21 某变压器铁芯的  $B$ - $H$  曲线如图 13-11(b)所示, 且当为正弦输入电压时最大磁通密度是 1.2T。试定性地证明励磁电流为非正弦的。

- 13.22 磁通  $\varphi = 2\sin 377t + 0.08\sin 1885t$  (mWb) 完全耦合一个 500 匝线圈。试计算在线圈中感应的 (a) 瞬时电压和 (b) 方均根电压。

答 (a)  $v = 377\cos 377t + 75.4\cos 1885t$  (V); (b)  $V = 271.86\text{V}$

- 13.23 一台 10kVA、60Hz、2200V/220V 变压器设计成工作于 1T 的最大磁通密度和每匝 15 伏特的感应电压。试求出 (a) 初级绕组匝数, (b) 次级绕组匝数。 (c) 铁芯截面积是多大?

答 (a) 147 匝; (b) 15 匝; (c)  $0.0563\text{m}^2$

- 13.24 一个变压器的匝比为 4。(a) 如果将 50Ω 电阻跨接于次级, 它的相对于初级电阻是多少? (b) 如果将同

样电阻改为跨接于初级,它的相对于次级电阻是多少?

答 (a)800Ω;(b)3.125Ω

- 13.25 参考图 13-6。一台 110kVA、2200V/110V 变压器电路参数的欧姆值是  $R_1 = 0.22\Omega$ ,  $R_2 = 0.5m\Omega$ ,  $X_1 = 2.0\Omega$ ,  $X_2 = 5m\Omega$ ,  $R_c = 5494.5\Omega$ ,  $X_m = 1099\Omega$ 。试计算在满载且全功率因数下变压器的 (a) 电压调整率, (b) 效率, (c) 求变压器的铁芯损耗。

答 (a)1.55%; (b)98.6%; (c)1346.3W

- 13.26 在一台 10kVA、220V/110V、60Hz 变压器上进行了开路试验和短路试验。两个试验都是用高压边的仪表进行的, 并获得如下数据:

开路试验: 输入功率 500W; 输入电压 220V; 输入电流 3.16A

短路试验: 输入功率 400W; 输入电压 65V; 输入电流 10A

试求出 (a) 相对于初级的和 (b) 相对于次级的近似等效电路参数。

答 (a)  $R_1 = 96.8\Omega$ ,  $X_m = 100\Omega$ ,  $R_1 + a^2 R_2 = 4\Omega$ ,  $X_1 + a^2 X_2 = 5.1\Omega$ ; (b)  $R_1 = 24.2\Omega$ ,  $X_m = 25\Omega$ ,  $R_2 + (R_1/a^2) = 1\Omega$ ,  $X_2 + (X_1/a^2) = 1.28\Omega$ ;

- 13.27 一个变压器的铁芯损耗是  $P_i$ 。相对于次级的等效电阻是  $R_{e2}$ 。问在多大的次级电流  $I$  时这个变压器的效率将为最高? 利用近似等效电路进行分析。

答  $I = \sqrt{P_i/R_{e2}}$

- 13.28 一台 110kVA、2200V/110V、60Hz 变压器有如下电路参数:  $R_1 = 0.22\Omega$ ,  $R_2 = 0.5m\Omega$ ,  $X_1 = 2.0\Omega$ ,  $X_2 = 5m\Omega$ ,  $R_c = 5.5k\Omega$ ,  $X_m = 1.1k\Omega$ 。在 24 小时(全天)周期中, 变压器有如下负载期间: 4 小时为无载, 8 小时为 0.8 功率因数 1/4 满载, 8 小时为全功率因数 1/2 满载, 4 小时为全功率因数满载。在 24 小时周期中铁芯损耗保持为 1346W 恒定。试求变压器的全天能量效率, 定义为 24 小时内能量输出与能量输入之比。

答 96.1%

- 13.29 一台 1.5kVA、230V/115V 变压器具有如下电路参数:  $R_1 = 4R_2 = 0.4\Omega$ ,  $X_1 = 4X_2 = 1.2\Omega$ ,  $X_m = 1300\Omega$ ,  $R_c = 1800\Omega$ 。试利用精确等效电路在全功率因数满载下计算 (a) 变压器效率, (b) 端电压的比  $V_1/V_2$ 。

答 (a)95.8%; (b)2.045

- 13.30 利用近似等效电路重解题 13.29。

答 (a)95.8%; (b)2.04

- 13.31 如果功率因数是 0.8 滞后, 重解题 13.29。

答 (a)94.8%; (b)2.12

- 13.32 如果由一个具有匝比  $N_1/N_2 = a$  的两绕组变压器做成自耦变压器, 试证明:

$$\frac{\text{自耦变压器的磁化电流}}{\text{两绕组变压器的磁化电流}} = \frac{a-1}{a}$$

$$\frac{\text{自耦变压器的短路电流}}{\text{两绕组变压器的短路电流}} = \frac{a}{a-1}$$

- 13.33 并联工作的两个变压器输出 0.8 滞后功率因数的 230V、400kVA 负载。一个变压器是额定 2300V/225V 并具有相对于初级的阻抗  $1.84 \angle 84.2^\circ \Omega$ 。第二个变压器的对应数据是 2300V/230V 和  $0.77 \angle 82.5^\circ \Omega$ 。试计算出由每个变压器输出的 (a) 电流, (b) 功率。

答 (a)657A, 1112A; (b)96kW, 224kW

- 13.34 将三个 100kVA、19000V/220V 变压器的高压绕组按三角形连接。相绕组传导 0.866 滞后功率因数的额定电流。试求初级线电压、相电压、线电流、相电流。

答  $V_{AB} = 19000 \angle 0^\circ \text{V}$ ,  $V_{BC} = 19000 \angle 120^\circ \text{V}$ ,  $V_{CA} = 19000 \angle 240^\circ \text{V}$

$I_{AB} = 5.26 \angle -30^\circ \text{A}$ ,  $I_A = 9.1 \angle 0^\circ \text{A}$

- 13.35 已知耦合于一个 500 匝线圈的磁通为  $\phi = 8t^2 (\text{Wb})$ , 式中  $t$  按 s 计。试画出感应电压与  $t$  的关系曲线。计算在  $t = 2\text{s}$  和  $t = 4\text{s}$  时的感应电压。

答 16kV、32kV

- 13.36 考虑到如图 13-6(a) 所示相对于初级的变压器等效电路, 请回答下列问题: (a) 在获取显示阻抗方面利用了什么试验? (b) 在关于显示阻抗的试验结果中包含了什么近似? (c) 变压器铁心中的漏磁通呈现在图中哪里? (d) 在能量损耗中阻抗的效果是哪个? (e) 以上述图中符号表示的变压器等效串联阻抗表达式是什么? (f) 如果变压器中磁芯材料的铁片厚度加倍, 对等效电路中的阻抗将是何种效应? 并

加以解释。

答 (e)达到适当的近似,如图 13-13 中那样,将并接支路移至最左端,串联阻抗于是为  $(R_1 + a^2 R_2) + j(X_1 + a^2 X_2)$ 。(f)铁片厚度加倍使涡流损耗成为四倍;因此  $R_c$  的值将减小。

- 13.37 同样额定伏安且同样额定次级电压的 25Hz 变压器或 60Hz 变压器,你预料哪个构件更为笨重?试加以解释。

答 由(13.13)得到 25Hz 变压器需要更大的磁通量。这意味着 25Hz 变压器需要更大的铁芯截面(对于相同的  $B_{\max}$ )。因此 25Hz 变压器更笨重。

- 13.38 一个理想变压器额定为 2400V/240V。将某个 50A 全功率因数的负载连接至低压绕组。这个负载两端必须精确地有 200V。当 2400V 施加至高压绕组时,如果加入电阻(a)与低压绕组串联,(b)与高压绕组串联,必须多大的电阻?

答 (a)0.8Ω; (b)80Ω

- 13.39 一台 50kVA、2300V/230V、60Hz 变压器,当 2300V 施加至高压边且无载时吸收 200W 和 0.30A。初级电阻为 3.5Ω。忽略漏电抗压降,试求(a)无载功率因数,(b)初级感应电压,(c)磁化电流,(d)铁芯损耗电流分量。

答 (a)0.29; (b)≈2300V; (c)0.286A; (d)0.088A

## 14.1 基本原理

机电能量转换是电能向机械能的转换,方向反之亦然。图 14-1 给出了无损耗旋转式换能器的黑盒图,对应的能量转换方程为

$$T\omega_m = vi \quad (14.1)$$

式中  $T$  和  $\omega_m$  是机械口的转矩(单位:  $\text{N}\cdot\text{m}$ )和旋转速度(单位:  $\text{rad/s}$ ),  $v$  和  $i$  是电气口的电压和电流。

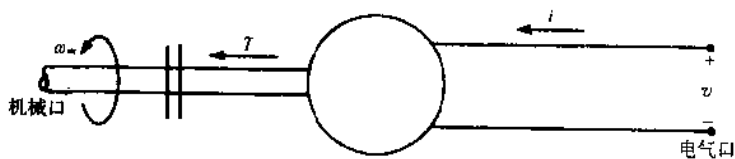


图 14-1

能量转换方程(14.1)仅仅是机械功率与电功率等效性的陈述,并没有对能量转换的过程作深入了解。发电机是在法拉第电磁感应定律(见 13.3 节)的基础上将机械能转换成电能的。依据法拉第定律,当导体“切割”磁力线或当耦合于电路的磁通随时间改变时(如 13.3 节中所述变压器),在导体中或在电路中就会感应出电压。法拉第定律的这两种形式可以在数学上表示为

$$e = lB\sin\theta = Blu_{\perp} \quad (14.2)$$

$$e = N \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) \quad (14.3)$$

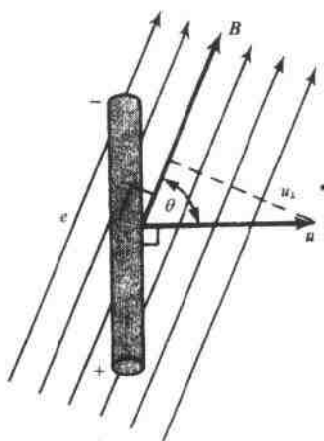


图 14-2

图 14-2 表示了式(14.2)与状态有关系(不需要考虑更一般的情形)。图中一个长度为  $l$  的直导体通过均匀磁场  $B$  以速度  $u$  运动,切割在直角方向的  $B$  磁通线。只有正交于场的速度分量在感应电压  $e$  方面是有效的,  $e$  的极性如图所示。注意如果  $\theta = 90^\circ$ , 则式(14.2)变成  $e = Blu$  ( $Blu$  法则)。式(14.3)中的第一个等式是法拉第定律的最一般形式;当应用于图 14-2 的状态时就可化为式(14.2)。式(14.3)中的第二个等式得自电感的定义式(13.5)。

将电能转换成机械能的电动机和机电换能器工作于两个原理的基础上:(1)磁通对直,(2)磁场与载流导体之间相互作用(安培定律)。图 14-3 举出了两个“磁通对直”的例子。图 14-3(a)中,铁磁块上的力起因于它们要对直磁通线,从而缩短磁通路径并减小磁阻。图 14-3(b)表示两个载流线圈的对直。图 14-4 给出了“载流导体与磁场之间相互作用”的例子。于是在图 14-4(b)中磁通线与线圈电流的相互作用产生了力,引起线圈上的转矩。

## 14.2 增量运动系统的力方程和转矩方程

既然电动机和发电机是总量运动装置,面机电换能器的运动是受限制的(小的位移),在这个意义上它们就是增量运动装置。例如扩音器膜的位移(处理电能并将其转换为机械能形式)

比起电动机的运动来是很小的。电磁式螺线管也属于增量运动装置一类。在这样的装置中电起源的机械力可以由能量守恒原理来确定,如下面例题所证明。

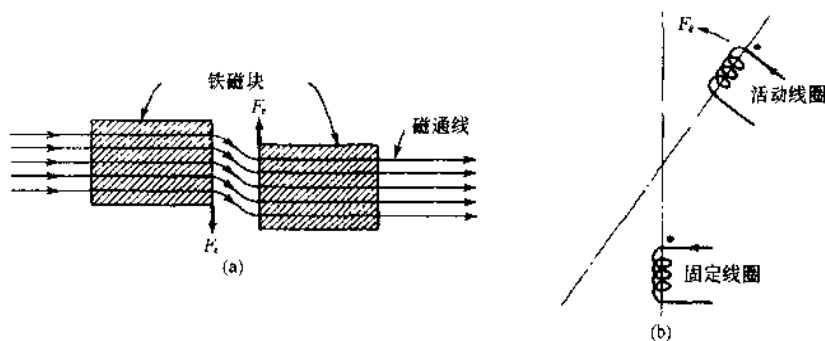


图 14-3

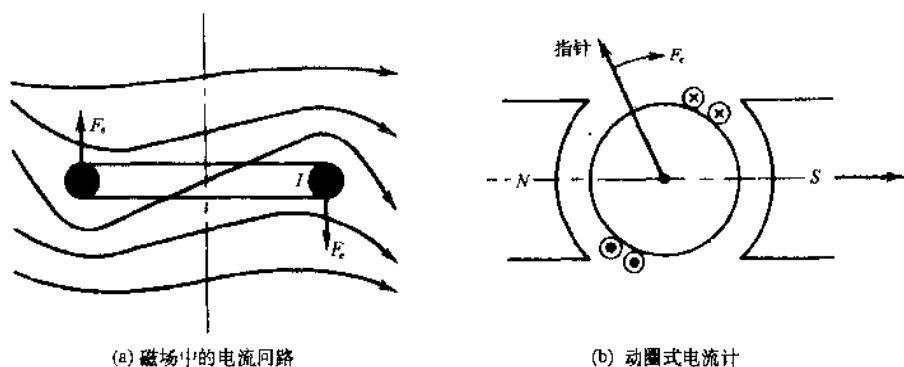


图 14-4

**例 14.1** 在任何无损耗(保守)机电系统中,

电能输入 = 系统所做机械功 + 贮能增加 (1)

考虑电磁铁吸引铁块的详情,如图 14-5(a)所示,图中铁块经过位移  $-dx$  (与  $x$  的正方向相反),①和②分别表示初位置和末位置。如果在由①移动到②期间线圈电流保持  $i = I_0$  不变,同时  $\lambda (= N\varphi)$  由  $\lambda_1$  变至  $\lambda_2$ ,于是可由法拉第定律式(14.3)给出来自电流源输入电能  $dW_e$  为

$$dW_e = I_0 e d\lambda = I_0 (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (2)$$

贮(磁)能增加  $dW_m$  为

$$dW_m = \frac{1}{2} (L_2 - L_1) I_0^2 = \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) I_0 \quad (3)$$

式中已假定了线性磁路  $L = \lambda/i$ 。用(1),

$$dW_e = (-F_e)(-dx) + dW_m \quad (4)$$

式中  $F_e$  是电致的力。由(1)、(2)、(3)可得

$$F_e dx = \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) I_0 = dW_m \quad (5)$$

另一方面,如果在移动期间磁链保持在  $\lambda = \lambda_0$  不变,则代替(2)和(3)的有

$$dW_e = 0 \quad (6)$$

$$dW_m = \frac{1}{2} \lambda_0 (i_2 - i_1) \quad (7)$$

此二式与(4)一起,得

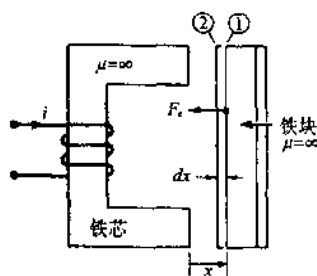


图 14-5

$$F_e dx = -\frac{1}{2} \lambda_0 (i_2 - i_1) = -dW_m \quad (8)$$

可以将例 14.1 的(5)和(8)重新表述为

$$\text{电流励磁: } F_e = \frac{\partial W_m(i, x)}{\partial x} \quad (14.4a)$$

$$\text{电压励磁: } F_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x} \quad (14.4b)$$

由此可看出,给出电起源机械力值的力方程存在着两种形式。对于旋转运动系统(总量运动以及增量运动),转矩的类似表达式为

$$\text{电流励磁: } T_e = \frac{\partial W_m(i, \theta)}{\partial \theta} \quad (14.5a)$$

$$\text{电压励磁: } T_e = -\frac{\partial W_m(\lambda, \theta)}{\partial \theta} \quad (14.5b)$$

方程(14.4a)与(14.4b)或(14.5a)与(14.5b)可以互换地用于线性磁路。

### 14.3 直流电机

#### 发电机和电动机

如在 14.1 节中所论述,发电机作用是基于电磁感应的法拉第定律。将式(14.2)或式(14.3)应用于在均匀磁场  $B$  中以恒定角速度  $\omega$  旋转的一个轴向长度为  $l$  半径为  $r$  的  $N$  匝矩形线圈[图 14-6(a)],得到

$$e = 2BNl r \omega \sin \omega t = BNA\omega \sin \omega t \quad (14.6)$$

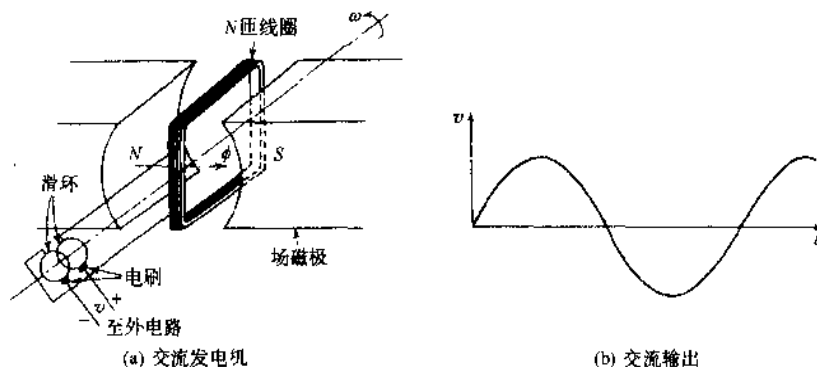


图 14-6

式(14.6)的第二个形式适合于面积为  $A$  的任意平面线圈。在滑环(或电刷)上电压  $v = e$  是可行的。如图 14-6 所示。感应电压的方向经常利用图 14-7(a)右手定则确定,与图 14-2 一致。

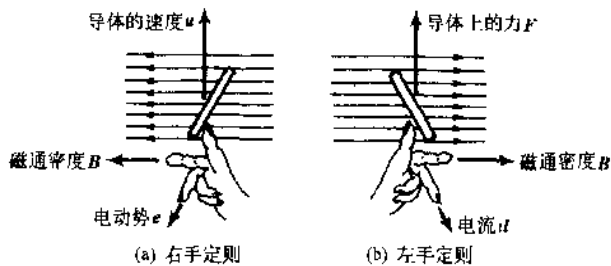


图 14-7

电动机作用是基于安培定律,此处改写为  $Bli$  法则:

$$F = B(li)_\perp \quad (14.7)$$

式中  $F$  是传导直流电流单元  $i$  的导体上所受力量的值,  $i$  正交于均匀磁场  $B$  的分量是  $(li)_\perp$ 。

力的方向可以由图 14-7(b)左手定则得到。

正如在发电机的两端产生交变正弦电压一样,在电刷上来自直流电源的线圈馈电所产生的转矩将是交变性质的,具有为零的对时间平均值。

### 换向器作用

为了在电刷上获得单向的极性,或由磁场中的线圈上获得单向的转矩,将图 14-6(a)的滑环/电刷机构改变成如图 14-8(a)。注意现在代替了两个滑环的是一个滑环成为互相绝缘的两半,这两半称为换向器片,电刷在上面滑动。应用右手定则可以很容易验证,这样的换向器/电刷系统引起电刷上具有一定的极性,对应于图 14-8(b)的输出电压波形。电刷上的这个直流输出具有非零的对时间平均值。

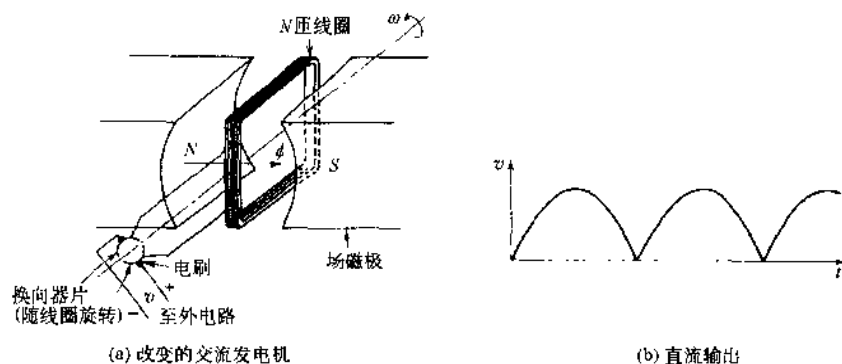


图 14-8

应用左手定则也可以验证,如果由直流电源馈给连接至换向器/电刷系统的线圈,引起的转矩就是单向的。

### 电枢绕组和物理性能

图 14-9 示出了直流电机的一些重要部分和物理性能。产生所需磁通的场磁极安装在定子上,并装有称为励磁绕组或励磁线圈的绕组。某些电机在同样的磁极铁芯上装有若干组励磁绕组。为了使它们的装配简化,磁极的铁芯由铁片叠层制成。因为励磁绕组传导直流电流,从电气上不必要具有层叠的铁芯。然而由于极面邻近电枢绕组,有必要将它们制成层叠的。装有电枢绕组的电枢铁芯通常安装在转子上并由铁片叠层制成。换向器由互相用云母绝缘的冷拉铜片制成。如图 14-10 所示,将电枢绕组连接至换向器片上,碳制电刷在片上滑动并作为电气连接的引线。电枢绕组是负荷的绕组。

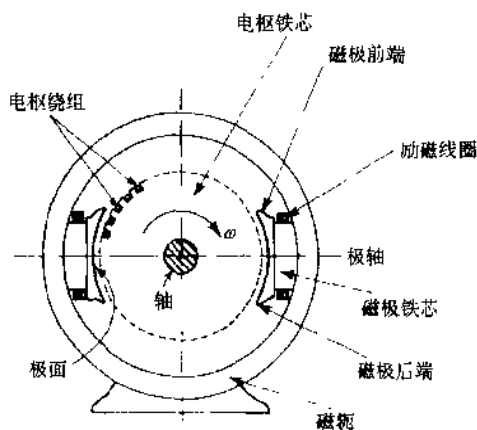


图 14-9

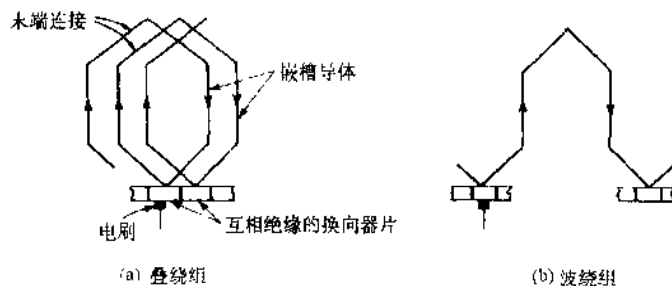


图 14-10

电枢绕组可以是叠绕组[图 14-10(a)]或是波绕组[图 14-10(b)],并且构成绕组的各个线圈可以按串联并联组合连接。求出了在叠绕组中并联路径的数目  $a$  等于磁极的数目  $p$ ;而在波绕组中并联路径的数目总是 2。

### 电动势方程

考虑在  $p$  个磁极且每个磁极具有磁通  $\varphi$  的磁场中,一个导体以  $n$  r/min(每分钟转数)旋转。在  $n$  圈之中导体切割的总磁通是  $p\varphi n$ ;于是,产生感应电压  $e$  的每秒切割磁通数为

$$e = \frac{p\varphi n}{60} \text{ (V)} \quad (14.8)$$

如果在电枢上有总数  $z$  个导体按  $a$  个并联路径连接,则在电枢绕组中产生总电压  $E$  的有效串联导体数为  $z/a$ 。因此,式(14.8)给出整个绕组的电动势方程

$$E = \frac{p\varphi n}{60} \frac{z}{a} = \frac{z\varphi}{2\pi a} \omega_m = k_a \varphi \omega_m \text{ (V)} \quad (14.9)$$

式中  $\omega_m = 2\pi n/60$  (rad/s),  $k_a = zp/2\pi a$  (无量纲常数)。如果磁路是线性的(即不存在饱和),则

$$\varphi = k_f i_f \quad (14.10)$$

式中  $i_f$  是励磁电流,  $k_f$  是比例常数;而式(14.9)变成

$$E = k i_f \omega_m \quad (14.11)$$

式中  $k = k_f k_a$  ( $\Omega \cdot s$ ) 是常数。对于非线性磁路,当为给定的转速时,  $E$  与  $i_f$  的关系是一个非线性曲线,如图 14-11 中所示。

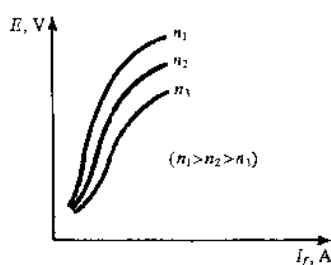


图 14-11

### 转矩方程

由电枢发出的机械功率是  $T_e \omega_m$ , 其中  $T_e$  是(电磁的)转矩,  $\omega_m$  是电枢的角速度。如果当电枢(感应)电压为  $E$  使电枢电流为  $i_a$  时发出了这个转矩,则电枢功率为  $E i_a$ 。如果忽略不计电枢中的任何损耗,于是  $T_e \omega_m = E i_a$ , 然后由式(14.9), 此式变为

$$T_e = k_a \varphi i_a \quad (14.12)$$

此式称为转矩方程。对于线性磁路,由式(14.10)和式(14.12)得出

$$T_e = k i_f i_a \quad (14.13)$$

式中  $k = k_f k_a$  与式(14.11)中一样,因而可以将  $k$  称做机电能量转换常数。注意在式(14.10)至式(14.13)中已经用了标志瞬时值的小写字母,这些量在稳态下同样是有用的。

### 转速方程

可以将直流电动机的电枢示意地表示为图 14-12。在稳态下,

$$V - E = I_a R_a \quad (14.14)$$

将式(14.9)代入式(14.14)得

$$\omega_m = \frac{V - I_a R_a}{k_a \varphi} \quad (14.15)$$

对于线性磁路,此式变为

$$\omega_m = \frac{V - I_a R_a}{k I_f} \quad (14.16)$$

式(14.16)的替代形式为

$$n = \frac{V - I_a R_a}{k_m I_f} \text{ (rpm)} \quad (14.17)$$

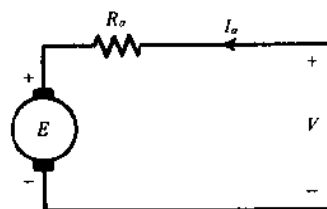


图 14-12



式中  $k_m \equiv 2\pi k / 60 (\Omega \cdot \text{min})$ 。方程(14.16)或(14.17)称为转速方程。

### 电机分类

直流电机可以根据励磁绕组与电枢绕组之间的互连进行分类,见图 14-13。

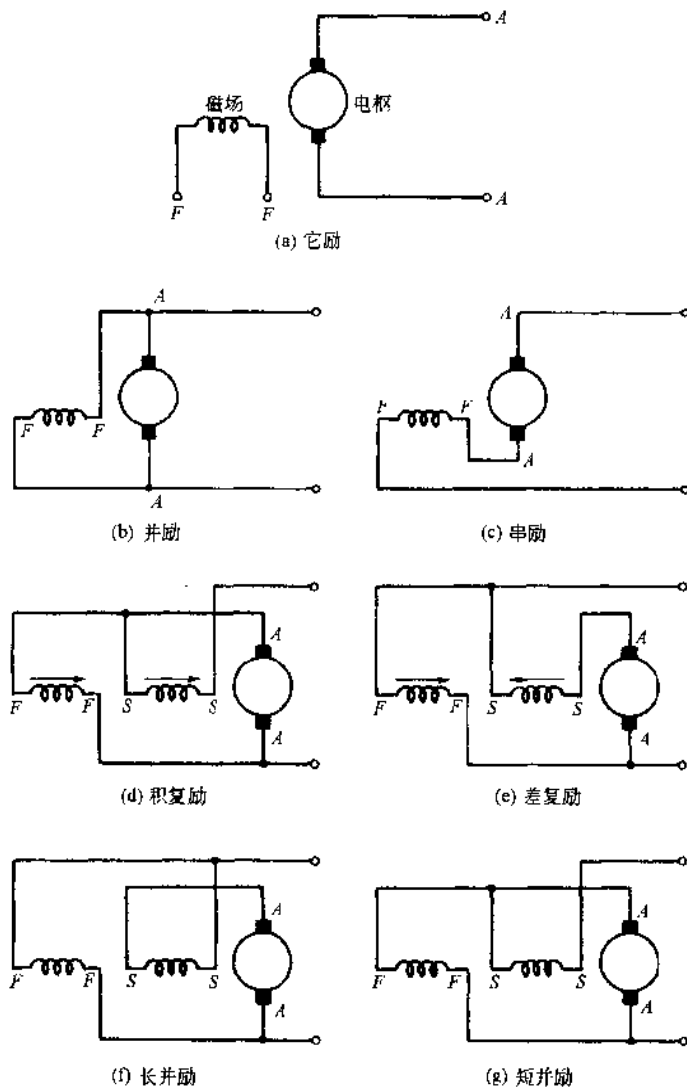


图 14-13

### 损耗和效率

除了伏安特性和转速-转矩特性之外,还可以用它的效率量度直流电机的特性:

$$\text{效率} = \frac{\text{功率输出}}{\text{功率输入}} = \frac{\text{功率输出}}{\text{功率输出} + \text{损耗}} \quad (14.18)$$

因此,可以由负载试验或者由损耗的测定来求出效率。将各种损耗分类如下:

电的:(1)各种绕组,如电枢绕组和不同的励磁绕组中的铜损耗。(2)起因于电刷(与换向器之间)的接触电阻。

磁的:在各种磁路,主要是在电枢铁芯和极面中具有铁损耗,包括磁滞损耗和涡流损耗。

机械的:包括轴承摩擦损耗、风阻损耗、电刷摩擦损耗。

杂散负载:没有包含在上述损耗中的负载损耗。根据经验,它们大约占到输出的1%。

图 14-14 表示了直流发电机或直流电动机中的功率流程,图中  $T_a$  代表轴转矩。

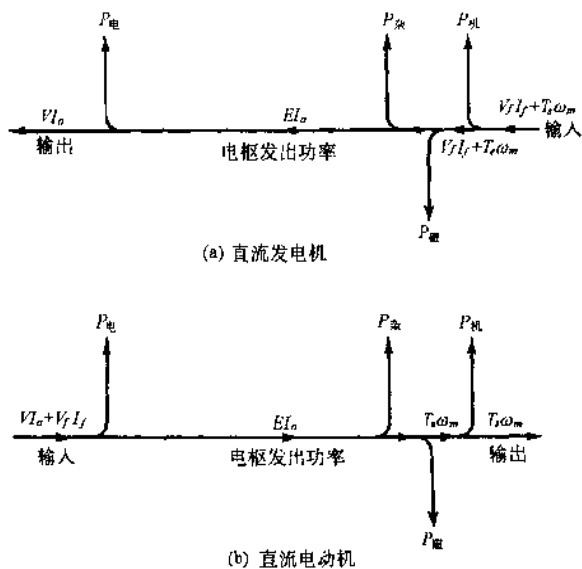


图 14-14

## 电动机特性和发电机特性

在确定电动机和发电机的潜在应用方面,经常是最关心这些电机的负载特性。在某些情况下(如在图 14-12 中),无载特性也是很重要的。在图 14-15 中示出了直流发电机的典型负载特性,图 14-16 示出了直流电动机的转矩-转速特性。

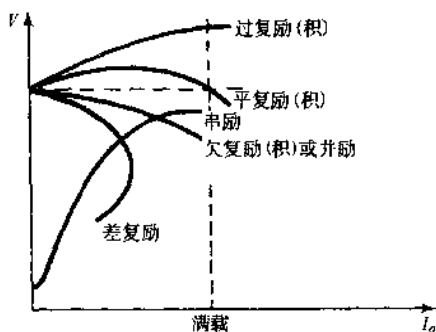


图 14-15

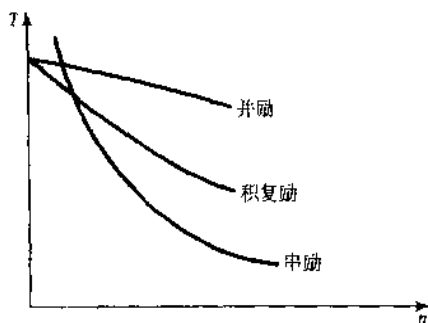


图 14-16

## 14.4 三相感应电动机

感应电动机大概是所有电动机中最普通的一类。像直流电机一样,感应电动机也包含定子和转子,转子安装在轴承上并且由气隙使与定子隔开。冲孔片制成的(即叠层)定子铁芯装有嵌槽导体。将这些导体按预定的方式互连起来构成电枢绕组。

将交流电流输送至定子绕组,由定子电流的磁场感应出转子绕组的电流。感应电机的转子是圆柱形的,并且装有:(1)两端被导电环短路的导电条,如笼式电机[图 14-17(a)];或(2)多相绕组,末端接至对外连接的滑环,如线绕转子电机[图 14-17(b)]。线绕转子绕组类似于定子的绕组。有时将笼式电机称做无刷电机,将线绕转子电机称做滑环电机。

感应电动机工作在感应转子电流与气隙磁场相互作用的基础上。如果在这个相互作用形成的转矩之下使转子转动,电机将按电动机工作。相反,可以由外来作用驱使转子处于一个高的转速,以致电机开始输出电功率;于是它就按感应发电机工作。

将三相感应电动机的电枢绕组适当地分布在定子周边上,如图 14-18。假定每相产生的磁动势在空间上是正弦式的。这些磁动势在空间上相互移动  $120^\circ$ (电的):

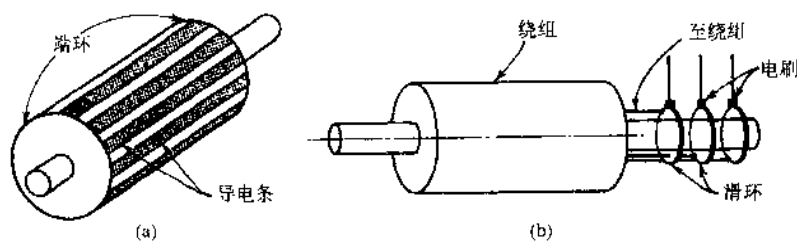


图 14-17

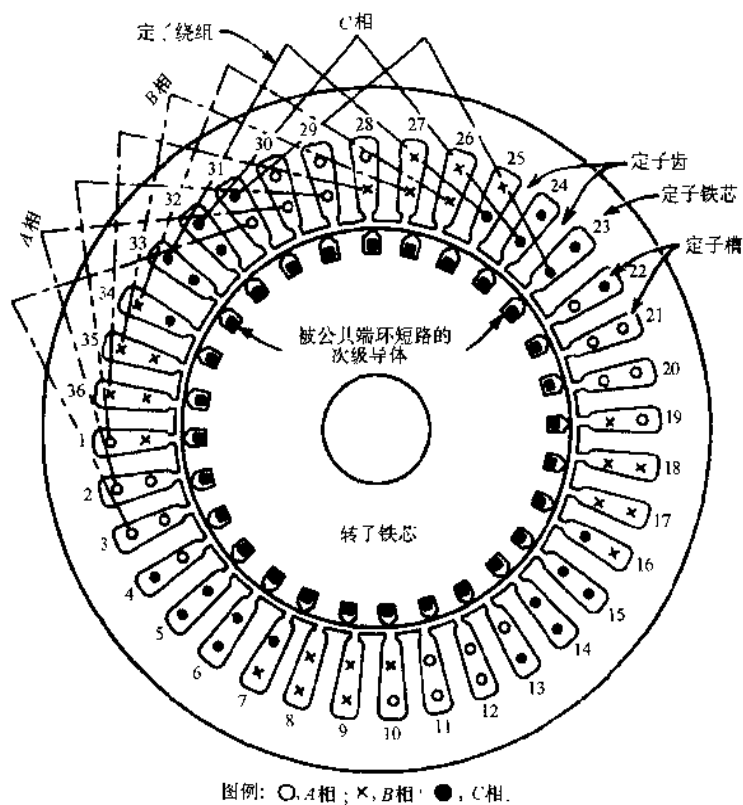


图 14-18

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A &= \mathcal{F}_m \sin \omega t \cos \frac{\pi x}{\tau} \\ \mathcal{F}_B &= \mathcal{F}_m \sin(\omega t - 120^\circ) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - 120^\circ\right) \\ \mathcal{F}_C &= \mathcal{F}_m \sin(\omega t + 120^\circ) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + 120^\circ\right)\end{aligned}\quad (14.19)$$

式中  $\mathcal{F}_m$  是每个磁动势的振幅。对于仅考虑基波的  $N$  匝线圈,  $\mathcal{F}_m = 0.9NI$ 。

将式(14.19)的三个磁动势相加, 得到合成的磁动势为

$$\mathcal{F}(x, t) = 1.5\mathcal{F}_m \sin\left[\omega t - \frac{\pi x}{\tau}\right] \quad (14.20)$$

由此看出  $\mathcal{F}(x, t)$  是一个振幅为  $1.5\mathcal{F}_m$ , 以相对于定子的速度

$$v_s \equiv \frac{\tau\omega}{\pi} \quad (\text{m/s}) \quad (14.21)$$

环绕运行的波, 称  $v_s$  为同步速度。注意波长是

$$\lambda = \frac{2\pi v_s}{\omega} = 2\tau \quad (\text{m}) \quad (14.22)$$

如果电机有  $p$  个磁极, 可将式(14.21)改写为

$$n_s \equiv \text{同步转数} = \frac{120f_1}{p} \quad (\text{rpm}) \quad (14.23)$$

式中  $f_1 = \omega/2\pi$  是定子电流(及磁动势旋转的)频率。

式(14.20)描述了由感应电动机定子产生的旋转磁场。这个磁节割转子导体,从而在这些导体中感应出电压。感应电压引起转子电流,电流与气隙磁场相互作用产生转矩,只要存在旋转磁场和感应转子电流,就维持转矩。因此,电动机是在旋转磁场方向上以旋转转数  $n < n_s$  起动的。

转差率,电机等效电路

经常通过转差率

$$s \equiv \frac{n_s - n}{n_s} \quad (14.24)$$

或百分转差率  $100s$  将转子的实际转数  $n$  与同步转数  $n_s$  联系起来。

在停止时( $s=1$ ),由定子产生的旋转磁场相对于转子绕组如同相对于定子绕组一样具有相同的转速。于是转子电流的频率  $f_2$  与定子电流的频率  $f_1$  是相同的。在同步转数时( $s=0$ ),旋转磁场与转子之间没有相对运动,而转子电流的频率为零(当然转子电流为零)。在中间转数时,转子电流频率与转差率成比例:

$$f_2 = sf_1 \quad (14.25)$$

因此将  $f_2$  称为转差频率。注意到是转差频率的转子电流,就有图 14-19(a)的转子等效电路(依据每相的),由此得出转子电流  $I_2$  为

$$I_2 = \frac{sE_2}{\sqrt{R_2^2 + (sX_2)^2}}$$

式中  $E_2$  是在停止时的感应转子电动势; $X_2$  是在停止时的每相转子漏磁电抗; $R_2$  是每相的转子电阻。此式也可写为

$$I_2 = \frac{E_2}{\sqrt{(R_2/s)^2 + X_2^2}} \quad (14.26)$$

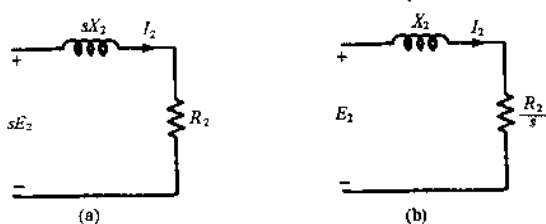


图 14-19

对于式(14.26),将图 14-19(a)的电路重新画为图 14-19(b)。

包含定子电路,可以将感应电动机看做具有气隙、次级中具有可变电阻[见式(14.26)]的变压器。于是,变压器的初级相当于感应电动机的定子,而次级相当于依据每相的转子。然而由于气隙的原因,磁化电抗  $X_m$  的值往往比真实变压器的  $X_m$  要低。像变压器中一样,在定子与转子之间具有以磁化电抗和各种漏磁通表示的相互磁通耦合。例如,在图 14-19(b)中用  $X_2$  代表总的转子漏磁通。

设想将转子耦合至定子就像将变压器的次级耦合至它的初级一样,可以画出图 14-20 所示的电路。进一步推导这个电路,按相对于定子(像在变压器中一样)来表达转子的量,得到图 14-21(a)中所示的精确等效电路(每相的)。为了要直接将其变成更为清楚起见,分解  $R_2/s$  为

$$\frac{R_2}{s} \equiv R_2' + \frac{R_2}{s}(1-s)$$

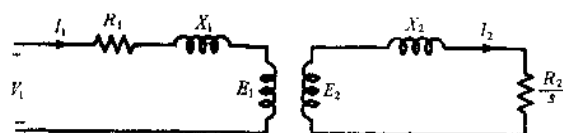


图 14-20

以得到图 14-21(b) 中所示的电路。图中,  $R_2'$  就是相对于定子的每相停止时转子电阻,  $R_2'(1-s)/s$  是取决于转子转数并且对应于电动机负载的每相动态电阻。注意在图 14-21 中所示的全部参数都是停止时的值。

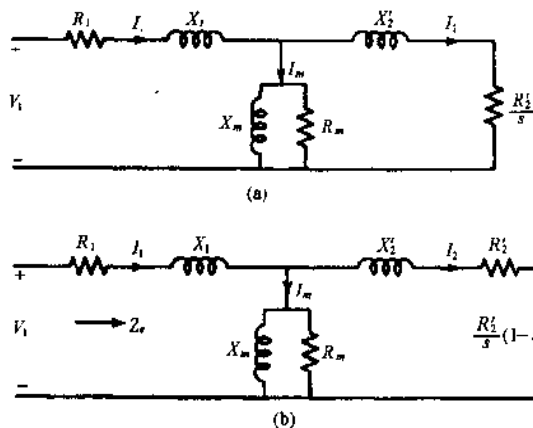


图 14-21

#### 由等效电路的计算

感应电动机等效电路的主要用处在于它的性能的计算。全部计算都是在假定均衡的电机工作下依据每相进行的, 然后利用适当的倍数因子得到总的量值。

图 14-22(a) 省略了  $R_m$  的图 14-21(b)。(多数是在定子中的铁芯损耗将只包含在效率计算中。)在电机的一相中功率流程和各种功率损耗近似地表示在图 14-22(b) 中。图中

$P_i \equiv$  输入功率

$P_g \equiv$  越过气隙的功率

$P_d \equiv$  发出的电磁功率

$\equiv$  负载  $R_2'(1-s)/s$  中的功率

$P_r \equiv$  旋转的(机械的)损耗

$P_o \equiv$  轴输出功率

电动机的效率是

$$\eta \equiv P_o / P_i.$$

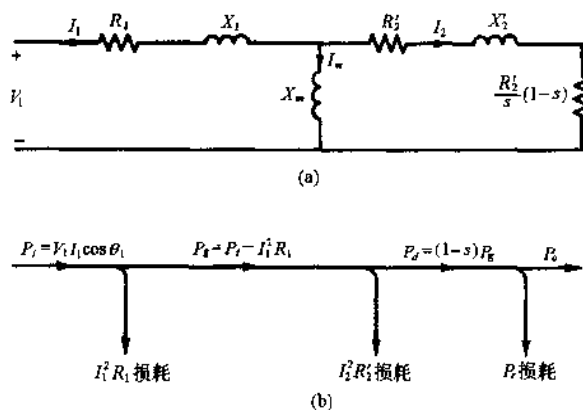


图 14-22

### 14.5 同步电机

由于这类电机在稳定状态下工作于恒定的转速和恒定的频率,故称之为同步电机。同大多数旋转电机一样,同步电机可以按电动机作用或按发电机作用。

同步电机的工作是基于电磁感应的法拉第定律,而且同步发电机工作很像直流发电机,其中电动势的产生都是利用了导体与磁通的相对运动。但是同步发电机没有像图 14-8 所示的直流发电机那样的换向器。同步电机的两个基本结构是场结构和电枢,场结构装有直流励磁绕组,电枢经常有产生交流电动势的三相绕组。几乎全部新式的同步电机都具有固定的电枢和旋转的场结构。旋转场结构上的直流绕组经过滑环和电刷连接至外部电源,要不然就接受来自旋转二极管的无电刷励磁。装有电枢绕组的定子类似于多相感应电动机的定子。除了电枢和励磁绕组以外,同步电机在转子上还有阻尼导电条,它们在瞬态和起动期间起作用。

由于转子结构不同,同步电机可以是圆形转子式的[图 14-23(a)]或凸极式的[图 14-23(b)]。(注意在图 14-23 中没有表示出电枢。)前一型式用于高转速电机,例如汽轮发电机,而后一型式适于低转速的水轮发电机。

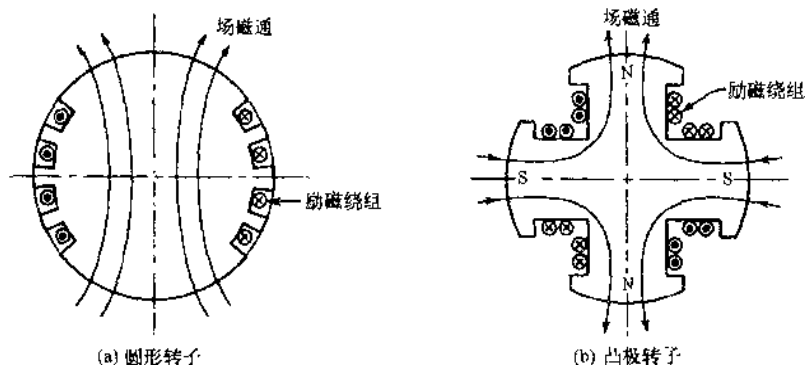


图 14-23

发电机工作和电动机工作;电动势方程

为了理解发电机工作,首先参看有集中绕组的三相圆形转子电机(图 14-24)。由式(14.6)可求出 A 相中感应的电压

$$v_A = V_m \sin \omega t$$

式中  $\omega$  是转子的角速度。相对于 A 相移动且互相移动  $120^\circ$  的 B 相和 C 相,有感应电压

$$v_B = V_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad v_C = V_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$

图 14-25 画出了这些电压的略图。于是产生了频率为  $f = \omega/2\pi$  (Hz) 的三相电压。

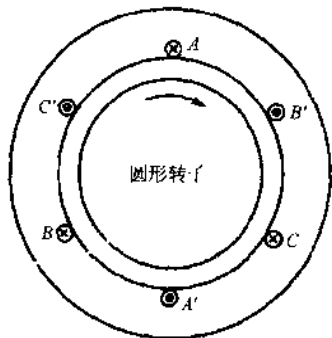


图 14-24 三相圆形转子同步电机

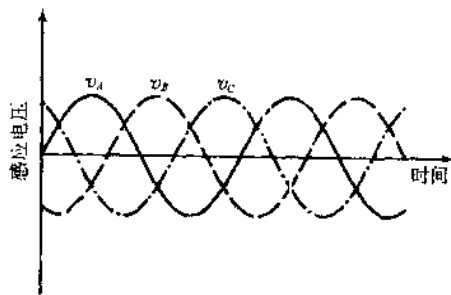


图 14-25

其次,图 14-26 示出了所考虑的凸极发电机,令直流励磁绕组产生磁通密度分布

$$B(\theta) = B_m \cos \theta$$

式中  $\theta$  是相对于转子轴计量的, 如图 12-26 中所示。设对应于 A 相的  $N$  匝电枢线圈具有半径  $r$  和轴向长度  $l$ 。于是, 当转子的方位角是  $\alpha = \omega t$  (见图 14-26) 时, 耦合这个线圈的总磁通是

$$\lambda = N \int_{(\pi/2)-\alpha}^{(3\pi/2)-\alpha} B(\theta) l r d\theta = -2NB_m l r \cos \alpha$$

由法拉第定律, 线圈中的感应电压是

$$v_A = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = V_m \sin \alpha t \quad (14.27)$$

式中  $V_m = 2NB_m l r \omega$ ; 对于 B 相和 C 相求出类似的表达式。由此可看出圆形转子发电机和凸极发电机都由式 (14.27) 决定, 此式称为同步发电机的电动势方程。

现在我们转向三相同步电动机的工作, 考虑凸极电机 (图 14-26), 观察三相电枢 (即定子) 绕组将像三相感应电动机 (14.4 节) 一样在气隙中产生旋转磁场。磁场旋转的转数即同步转数  $n_s$  由

$$n_s = \frac{120f}{p} \quad (\text{rpm}) \quad (14.28)$$

给出, 式中  $p$  是磁极的数目,  $f$  是施加于电枢的电压频率。但是如果在转子上没有短路导体, 电动机就不会自启动。假设迫使凸极电机的转子达到接近于  $n_s$  的转数 (由某个辅助装置), 即使转子上没有磁场激励, 由于磁阻转矩, 转子也将与定子的旋转磁场对直并旋转。

显然图 14-24 所示的圆形转子电机中不存在磁阻转矩。然而, 对于以近同步转数转动的两种型式电机中的任何一种, 如果转子上的励磁绕组激励出转子磁场的北极正对着这时定子磁场的南极, 那么两个磁场将要锁定且转子以同步转数转动。

为了使同步电动机能自启动, 它装有类似于感应电动机笼子的阻尼导电条, 以提供一个启动转矩。只要已经牵引转子使其与旋转的定子磁场步调一致而以同步转数转动, 阻尼导电条就会停止作用。任何对同步转数的偏离, 都在阻尼导电条中感应出电流, 使得趋向于恢复同步转数。

#### 发电机无载特性、短路特性、电压调整特性

同步发电机的无载 (即开路) 电压特性类似于直流发电机的特性。图 14-27 示出了包含饱和作用的这种特性。现在如果将发电机的两端短路, 感应电压将降落在发电机内部。图 14-27 同时示出的短路电流特性由相量关系 (依据每相的):

$$V_0 = I_a Z_s = I_a (R_a + jX_s) \quad (14.29)$$

得出。在式 (14.29) 中,  $V_0$  是在某个励磁电流下的无载电枢电压,  $I_a$  是在同样励磁电流下的短路电枢电流, 阻抗  $Z_s$  称为同步阻抗,  $R_a$  是电枢电阻,  $X_s$  定义为同步电抗。由于在这样的电机中  $X_s$  是与转子方位无关的, 因此很容易测出圆形转子发电机的同步电抗。然而, 在凸极发电机中, 同步电抗取决于转子方位。

大多数同步电机中  $R_a \ll X_s$ , 因此按图 14-27,

$$X_s \approx Z_s = \overline{AC} / \overline{BC}$$

于是, 如图 14-27 中下降 (由于饱和) 曲线所示,  $X_s$  随励磁电流变化。然而对于大多数计算, 我们使用  $X_s$  的线性 (恒定) 值。

同变压器和直流发电机一样, 定义在给定负载下同步发电机的电压调整率为

$$\text{百分电压调整率} = \frac{V_0 - V_t}{V_t} \times 100\% \quad (14.30)$$

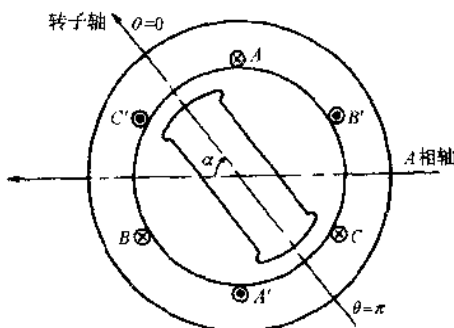


图 14-26 三相凸极同步电机

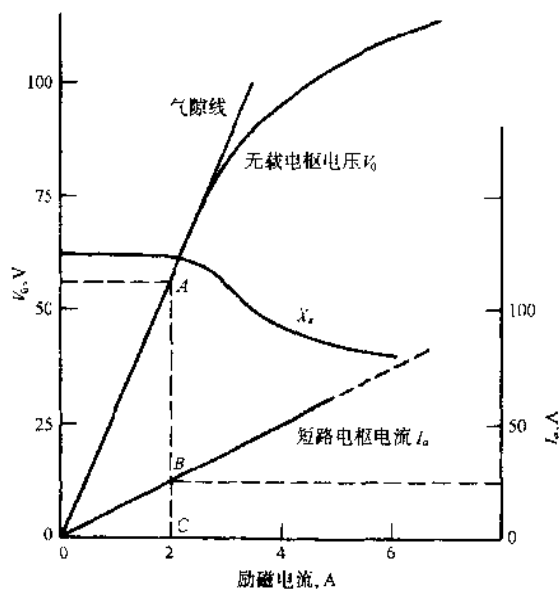


图 14-27

式中  $V_t$  是每相的负载端电压,  $V_0$  是每相的无载端电压。已知  $X_s$  (圆形转子发电机) 和  $V_t$ , 就可以由式(14.29)求出  $V_0$  并由此确定电压调整率。

与直流发电机不同, 同步发电机的电压调整率取决于功率因数和负载, 可以成为零甚至负。忽略电枢电阻后, 图 14-28 示出了滞后功率因数和超前功率因数时的相量图。

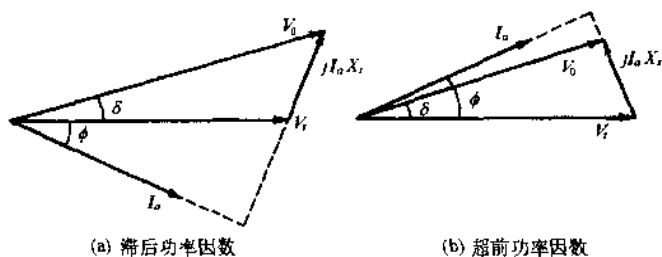


图 14-28 同步发电机的相量图

#### 圆形转子电机的功率角特性

参考图 14-28,  $\varphi$  是功率因数角, 我们将  $V_0$  超前于  $V_t$  的角  $\delta$  定义为功率角。由图 14-28 我们可以得到:

$$I_a X_s \cos \varphi = V_0 \sin \delta \quad (14.31)$$

这里假定了  $\delta > 0$  (发电机作用)。发电机发出的功率(每相)  $P_d$  是向负载提供的功率。于是

$$P_d = V_t I_a \cos \varphi \quad (14.32)$$

比较式(14.31)与式(14.32)我们可以得到

$$P_d = \frac{V_0 V_t}{X_s} \sin \delta \quad (14.33)$$

此式表明发电机发出的功率与  $\sin \delta$  成比例。

如图 14-29(a)所示, 如果忽略电枢电阻, (圆形转子)电动机消耗的电功率在量值上为每相  $V_t I_a \cos \varphi$ 。因此我们定义电动机发出的功率为

$$P_d = -V_t I_a \cos \varphi$$

有了这种理解, 则式(14.33)对于圆形转子电动机也是有效的, 现在式中的  $\delta$  和  $\sin \delta$  为负 ( $V_t$  超前于  $V_0$ )。总之, 式(14.33)是圆形转子同步电机的功率角特性, 在图 14-29(b)中给出了其



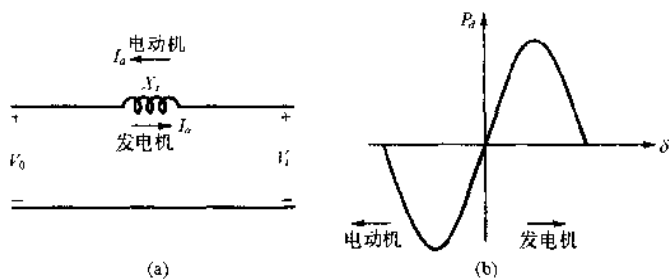


图 14-29 对于圆形转子电机

图像。

对于电动机,图 14-29(a)给出

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_0 + j\mathbf{I}_a X_s \quad (14.34)$$

如果电动机工作于恒定功率下,对于给定的端电压  $V_t$ ,式(14.31)和式(14.32)意味着

$$V_0 \sin \delta = I_a X_s \cos \varphi = \text{常数} \quad (14.35)$$

现在,  $V_0$  取决于励磁电流  $I_f$ 。考虑两种情况:(1)调节  $I_f$  使  $V_0 < V_t$  (欠励磁电机);(2)增大  $I_f$  使  $V_0 > V_t$  (过励磁电机)。在图 14-30(a)示出了两种情况的电压-电流相量关系,其中涉及欠励磁工作的用单撇,涉及过励磁工作的用双撇。在恒定功率下,如由式(14.35)所决定的,当  $V_0 > V_t$  比起当  $V_0 < V_t$  时  $\delta$  负得更少。注意,欠励磁电动机工作于滞后功率因数( $I_a$  滞后于  $V_t$ ),而过励磁电动机工作于超前功率因数。于是,电动机的工作功率因数由磁场激励控制(因而改变  $V_0$ ),这是同步电动机的重要性质。在图 14-30(a)也示出了如式(14.35)所给出的恒定负载下当励磁电流变化时电枢电流的轨迹。由这里可以获得电枢电流  $I_a$  随着励磁电流  $I_f$  (对应于  $V_0$ ) 的变化;在图 14-30(b)画出了对于几种不同负载的结果,这些曲线称做同步电动机的 V 形曲线。

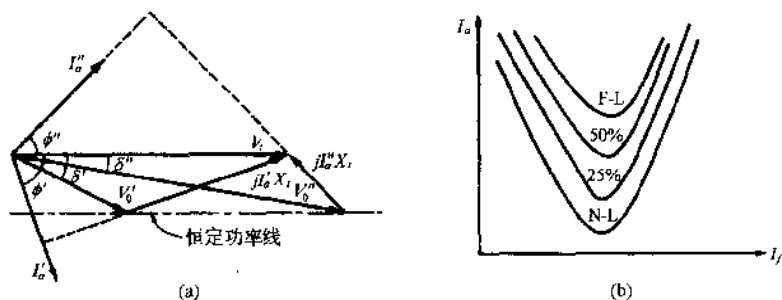


图 14-30 圆形转子电动机的恒定功率工作

### 凸极同步电机

对于凸极电机,定义顺轴电感  $L_d$  为转子轴与定子轴对直时的电感值,正交轴电感  $L_q$  为转子轴与定子轴反对直(正交)时的电感值。类似地,定义顺轴同步电抗  $X_d$  和正交轴同步电抗  $X_q$ 。于是,对于发电机工作画出图 14-31 的相量图。注意已经将  $I_a$  分解为它的顺轴分量  $I_d$  和正交轴分量  $I_q$  (假想的)。借助于相量图可以得到

$$I_d = I_a \sin(\delta + \varphi), \quad I_q = I_a \cos(\delta + \varphi) \quad (14.36)$$

$$V_t \sin \delta = I_q X_q = I_a X_q \cos(\delta + \varphi) \quad (14.37)$$

式(14.37)的展开给出

$$\tan \delta = \frac{I_a X_q \cos \varphi}{V_t + I_a X_q \sin \varphi} \quad (14.38)$$

已知  $\delta$  (以  $\varphi$  表示的),就可以由

$$V_0 = V_t \cos \delta + I_d X_d$$

计算电压调整率。

$$\text{百分调整率} = \frac{V_0 - V_t}{V_t} \times 100\%$$

实际上,相量图描绘了电机的全部性能特征。

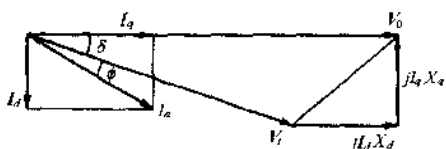


图 14-31 凸极发电机的相量图

**例 14.2** 图 14-31 可以用于导出凸极发电机的功率角特性。如果忽略电枢电阻,应用式(14.32)。现在,由图 14-31,  $I_a$  在  $V_t$  上的投影是

$$\frac{P_d}{V_t} = I_a \cos \varphi = I_q \cos \delta + I_d \sin \delta \quad (14.39)$$

求解  $I_q X_q = V_t \sin \delta$  和  $I_d X_d = V_0 - V_t \cos \delta$  中的  $I_q$  和  $I_d$  并代入式(14.39),可得出

$$P_d = \frac{V_0 V_t}{X_d} \sin \delta + \frac{V_t^2}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \quad (14.40)$$

对于凸极电动机( $\delta < 0$ ),也可以建立方程(14.40);图 14-32 给出了式(14.40)的图象。可以看出,当  $X_d = X_q = X_s$  时,式(14.40)就简化成圆形转子方程(14.33)。

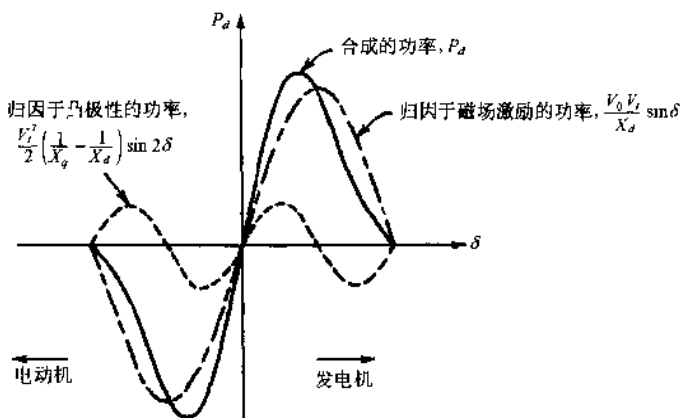


图 14-32 凸极电机的功率角特性

## 例题解答

### 增量运动系统

- 14.1** 在图 14-33 中示出了圆柱几何形状的螺线管。(a)如果励磁线圈传导直流稳态电流  $I$ , 试导出插棒铁芯上力的表达式。(b)对于数值  $I = 10\text{A}$ ,  $N = 500$  匝,  $g = 5\text{mm}$ ,  $a = 20\text{mm}$ ,  $l = 40\text{mm}$ , 力的量值是多少? 假定  $\mu_{\text{Fe}} = \infty$  且忽略漏磁。

**解** 关于磁路,磁阻为

$$\mathcal{R} = \frac{g}{\mu_0 \pi c^2} + \frac{b}{\mu_0 2\pi a l} \quad \text{其中 } c = a - \frac{b}{2}$$

在式(13.5)中利用式(13.3)和  $\varphi = \mathcal{F}/\mathcal{R}$ , 得电感  $L$  为

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{2\pi\mu_0 a l c^2 N^2}{2a l g + b c^2} = \frac{k_1}{k_2 g + k_3}$$

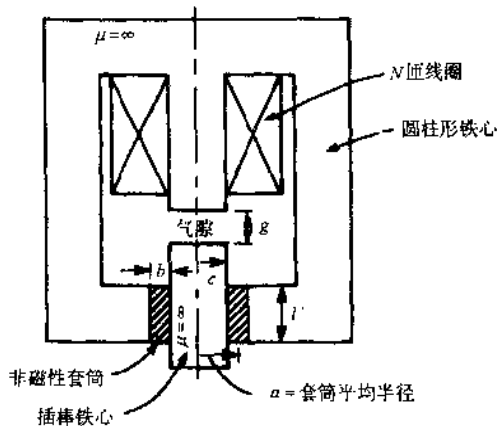


图 14-33

式中  $k_1 \equiv 2\pi\mu_0 abc^2 N^2$ ,  $k_2 \equiv 2al$ ,  $k_3 \equiv bc^2$ 。

(a) 由式(14.4a)

$$F_e = \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{2} I^2 \right) = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial g} = - \frac{I^2 k_1 k_2}{2(k_2 g + k_3)^2}$$

式中负号表示力趋向于减小气隙。

(b) 将数值代入(a)的力表达式中得到 600N 为  $F_e$  的值。

14.2 (a) 如果题 14.1(a) 的螺线管改为传导 60Hz 的 10A (方均根) 交流电流, 瞬时的力是什么?

(b) 如果  $N$ 、 $g$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $l$  具有如题 14.1(b) 中同样的数值, 平均的力是多大?



$$(a) F_e = - \frac{(10\sqrt{2} \cos 120\pi t)^2 k_1 k_2}{2(k_2 g + k_3)^2} = - \frac{100 k_1 k_2}{(k_2 g + k_3)^2} \cos^2 120\pi t \text{ (N)}$$

(b) 因为  $\cos^2$  具有平均值 1/2, 平均的力与起因于直流 10A 的力是相同的, 即 600N。

14.3 对于电压励磁系统, 试证明可以将电气力表达为

$$F_e = - \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$$

式中  $\varphi$  是铁芯磁通,  $\mathcal{R}$  是磁路的净磁阻。



因为

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{N\varphi}{\mathcal{R}} \right) i^2 = \frac{1}{2} N\varphi \left( \frac{\mathcal{R}\varphi}{N} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{R} \varphi^2$$

由式(14.4b), 式中恒定的  $\lambda$  意味着恒定的  $\varphi$ , 则

$$F_e = - \frac{\partial W_m}{\partial x} = - \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$$

直流电机

14.4 具有 728 根有效导体的四极叠绕直流电机以 1800rpm 转动, 试计算在电枢绕组中感应的电压。每极的磁通是 30mWb。



因为电枢是叠绕的,  $p = a$ , 则

$$E = \frac{p\pi\omega}{60} \left( \frac{p}{a} \right) = \frac{(30 \times 10^{-3}) \times 1800 \times 728}{60} = 655.2 \text{ V}$$

14.5 如果电枢是波绕的, 在题 14.4 电机的电枢中将感应多大电压?



当为波绕电枢时  $a = 2$ 。于是,

$$E = \frac{(30 \times 10^{-3}) \times 1800 \times 728}{60} \left( \frac{4}{2} \right) = 1310.4 \text{ V}$$

14.6 如果将题 14.4 中的电枢设计成传导 100A 的最大线电流, 电枢发出的最大电磁功率是多大?



因为叠绕电枢中有四条并联路径 ( $a = p = 4$ ), 每条路径可传导最大电流

$$\frac{I_a}{a} = \frac{100}{4} = 25 \text{ A}$$

而电枢发出的功率仍是

$$P_a = EI_a = 655.2 \times 100 = 65.5 \text{ kW}$$

14.7 试计算在题 14.4 中所描述电枢发出的电磁转矩。



由能量转换方程  $E I_a = T_e \omega_m$  和题 14.6 的结果,

$$T_e = \frac{E I_a}{\omega_m} = \frac{65.5 \times 10^3}{2\pi \times 1800/60} = 347.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

14.8 一个四极叠绕电枢具有 144 个槽, 每槽有两个线圈边, 每个线圈有两匝。如果每极的磁通是 20mWb, 电枢以 720rpm 旋转, 感应电压是多少?



将  $p = a = 4$ ,  $n = 720$ ,  $\varphi = 0.020$ ,  $z = 144 \times 2 \times 2 = 576$  代入电动势方程得到

$$E = \frac{0.020 \times 720 \times 576}{60} \left( \frac{4}{4} \right) = 138.24 \text{ V}$$

- 14.9 一台 100kW、230V 并励发电机具有  $R_a = 0.05\Omega$  和  $R_f = 57.5\Omega$ 。如果发电机工作于额定电压。试计算(a)满载时和(b)半满载时的感应电压。忽略电刷接触电压降。

见图 14-34;  $I_f = 230/57.5 = 4A$ 。

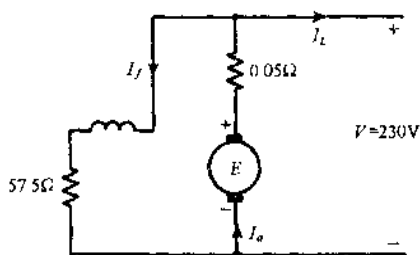


图 14-34

$$(a) \quad I_L = \frac{100 \times 10^3}{230} = 434.8A$$

$$I_a = I_L + I_f = 434.8 + 4 = 438.8A$$

$$I_a R_a = 438.8 \times 0.05 = 22V$$

$$E = V + I_a R_a = 230 + 22 = 252V$$

$$(b) \quad I_L = 217.4A$$

$$I_a = 217.4 + 4 = 221.4A$$

$$I_a R_a = 11V$$

$$E = 230 + 11 = 241V$$

- 14.10 一台 50kW、250V 短并复励发电机具有以下数据:  $R_a = 0.06\Omega$ ,  $R_{se} = 0.04\Omega$ ,  $R_f = 125\Omega$ 。试计算在额定负载和额定端电压下感应的电枢电压。总的电刷压降取为 2V。

见图 14-35。

$$I_L = \frac{50 \times 10^3}{250} = 200A$$

$$I_L R_{se} = 200 \times 0.04 = 8V$$

$$V_f = 250 + 8 = 258V$$

$$I_f = \frac{258}{125} = 2.06A$$

$$I_a = 200 + 2.06 = 202.06A$$

$$I_a R_a = 202.06 \times 0.06 = 12.12V$$

$$E = 250 + 12.12 + 8 + 2 = 272.12V$$

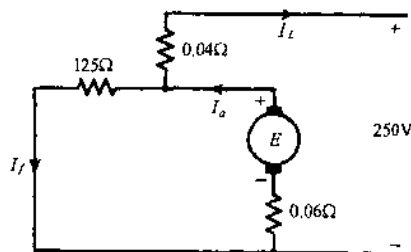


图 14-35

- 14.11 一台它励直流发电机有  $P_c(W)$  的恒定负载且工作于电压  $V$  和电枢电流  $I_a$ 。电枢电阻为  $R_a$ 。问在  $I_a$  的什么值时发电机效率最高?

$$\text{输出} = VI_a$$

$$\text{输入} = VI_a + I_a^2 R_a + P_c$$

$$\text{效率 } \eta = \frac{VI_a}{VI_a + I_a^2 R_a + P_c}$$

当  $\eta$  为最大值时,  $d\eta/dI_a = 0$ , 即

$$V(VI_a + I_a^2 R_a + P_c) - VI_a(V + 2I_a R_a) = 0, \text{ 因此 } I_a = \sqrt{P_c/R_a}$$

换言之, 当电枢损耗  $I_a^2 R_a$  等于恒定的损耗  $P_c$  时使效率达到最高。

- 14.12 题 14.9 的发电机具有 1.8kW 的总机械损耗和铁芯损耗。试计算出(a)满载下的发电机效率, (b)在这个负载下, 驱动发电机的原动机马力输出。

由题 14.9,  $I_f = 4A$  和  $I_a = 438.8A$ , 则

$$I_f^2 R_f = 16 \times 57.5 = 0.92kW$$

$$I_a^2 R_a = (438.8)^2 \times 0.05 = 9.63kW$$

$$\text{总损耗} = 0.92 + 9.63 + 1.8 = 12.35kW$$

(a)

$$\text{输出} = 100kW$$

$$\text{输入} = 100 + 12.35 = 112.35kW$$

$$\text{效率} = \frac{100}{112.35} = 89\%$$

(b)

$$\text{原动机输出} = \frac{112.35 \times 10^3 W}{746 W/\text{马力}} = 150.6 \text{ 马力}$$

- 14.13 (a)在多大负载下,题 14.9 和 14.12 的发电机达到最高效率? (b)这个最高效率的值是多少?

解 (a)由题 14.12, 恒定的损耗是  $P_c = 920 + 1800 = 2720\text{W}$ 。因此, 由题 14.11,

$$I_a = \sqrt{\frac{2720}{0.05}} = 233.24\text{A}$$

而

$$I_L = I_a - I_f = 233.24 - 4 = 229.24\text{A}$$

(b)

$$\text{输出功率} = 229.24 \times 230 = 52.72\text{kW}$$

$$I_a^2 R_a = P_c = 2.72\text{kW} \quad (\text{见题 14.11})$$

$$\text{输入功率} = 52.72 + 2 \times 2.72 = 58.16\text{kW}$$

$$\text{最高效率} = \frac{52.72}{58.16} = 90.6\%$$

- 14.14 一台 20 马力、250V 并励电动机有  $0.22\Omega$  的电枢电路电阻(包括电刷和附加磁极)和  $170\Omega$  的励磁电路电阻。在无载和额定电压下, 转速为  $1200\text{r/min}$  而电枢电流为  $3.0\text{A}$ 。在满载和额定电压下, 线电流为  $55\text{A}$ , 而磁通由它无载下的值减低 6% (起因于电枢反应的作用)。问满载转速是多少?

$$E_{\text{无载}} = 250 - 3.0 \times 0.22 = 249.3\text{V}$$

$$I_f = \frac{250}{170} = 1.47\text{A}$$

$$E_{\text{满载}} = 250 - (55 - 1.47) \times 0.22 = 238.2\text{V}$$

由于  $n_m$  与  $E/\phi$  成比例, 因此

$$n_{\text{满载}} = 1200 \times \frac{238.2}{249.3} \times \frac{1}{0.94} = 1220\text{r/min}$$

- 14.15 一台 10 马力、230V 并励电动机取用  $40\text{A}$  的满载线电流。电枢电阻和励磁电阻分别是  $0.25\Omega$  和  $230\Omega$ 。总的电刷接触压降是  $2\text{V}$ , 铁芯损耗和摩擦损耗是  $380\text{W}$ 。试计算电动机的效率。假定杂散负载损耗输出的 1%。

解 计算如下:

输入	$= 40 \times 230$	$= 9200\text{W}$
励磁电阻损耗	$=$	$230\text{W}$
电枢电阻损耗	$= (40 - 1)^2 \times 230$	$= 380\text{W}$
铁芯损耗和摩擦损耗	$=$	$380\text{W}$
电刷接触损耗	$= 2 \times 39$	$= 78\text{W}$
杂散负载损耗	$= \frac{10}{100} \times 746$	$= 75\text{W}$

因此

总损耗	$= 1143\text{W}$
功率输出	$= 9200 - 1143 = 8057\text{W}$
效率	$= \frac{8057}{9200} = 87.6\%$

- 14.16 一台具有  $0.1\Omega$  电枢电阻和  $250\Omega$  励磁电阻的  $10\text{kW}$ 、 $250\text{V}$  并励发电机, 在额定电压和  $800\text{r/min}$  之下输出满载功率。现在这个电机正按电动机运转, 在  $250\text{V}$  之下取用  $10\text{kW}$  功率。问这个电动的转速是多少? 忽略不计电刷接触的电压降。

解 按发电机:

$$I_f = \frac{250}{250} = 1\text{A}, I_L = \frac{10 \times 10^3}{250} = 40\text{A}$$

$$I_a = 40 + 1 = 41\text{A}, I_a R_a = 41 \times 0.1 = 4.1\text{V}$$

$$E_s = 250 + 4.1 = 254.1\text{V}$$

按电动机:

$$I_L = \frac{10 \times 10^3}{250} = 40\text{A}, I_f = \frac{250}{250} = 1\text{A}$$

$$I_a = 40 - 1 = 39\text{A}, I_a R_a = 39 \times 0.1 = 3.9\text{V}$$

$$E_m = 250 - 3.9 = 246.1\text{V}$$

现在,

$$\frac{n_m}{n_g} = \frac{E_m}{E_g}$$

因此

$$n_m = \frac{E_m}{E_g} n_g = \frac{246.1}{254.1} \times 800 = 774.8 \text{ rpm}$$

### 感应电动机

- 14.17** 由 60Hz 电源向一台四极三相感应电动机供电,并在转差率为 0.03 的负载条件下运转。试求:(a)转子转数,按 r/min;(b)转子电流频率,按 Hz;(c)转子旋转磁场相对于定子构架的转数,按 r/min;(d)转子旋转磁场相对于定子旋转磁场的转数,按 r/min。

$$n_s = \frac{120f_1}{p} = \frac{120 \times 60}{4} = 1800 \text{ r/min}$$

$$(a) \quad n = (1-s)n_s = (1-0.03) \times 1800 = 1746 \text{ r/min}$$

$$(b) \quad f_2 = sf_1 = 0.03 \times 60 = 1.8 \text{ Hz}$$

(c) 定子上的  $p$  个磁极在转子上感应出相等数目的磁极。现在,导出了式(14.20)的同样论证可以应用于转子。于是转子产生一个相对于转子的转数为

$$n_r = \frac{120f_2}{p} = \frac{120sf_1}{p} = sn_s$$

的旋转磁场。但是转子相对于定子的转数为  $n - (1-s)n_s$ 。因此,转子磁场相对于定子的转数为  $n_s - n_r + n - n_r$ ,即 1800 r/min。

(d) 零。

- 14.18** 一台 60Hz 感应电动机具有两个磁极并在 3510 r/min 下运转。试计算(a)同步转数,(b)百分转差率。

$$(a) \quad n_s = \frac{120f_1}{p} = \frac{120 \times 60}{2} = 3600 \text{ r/min}$$

$$(b) \quad s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{3600 - 3510}{3600} = 0.025 = 2.5\%$$

- 14.19** 试利用图 14-19(b)的转子等效电路,证明当感应电动机转子电阻(看作变量)等于它的漏磁电抗时将有最大的起动转矩。全部量都是依据每相的。

由图 14-19(b),发出功率  $P_d$  由

$$P_d = I_2^2 \frac{R_2}{s} = T_r \omega_m \quad (1)$$

给出,而转子电流  $I_2$  使

$$I_2^2 = \frac{E_2^2}{(R_2/s)^2 + X_2^2} \quad (2)$$

又因为机械角速度为

$$\omega_m = (1-s)\omega_s \quad (3)$$

式中  $\omega_s$  是同步角速度。这三个方程给出

$$T_r = \frac{E_2^2 s}{\omega_s} \frac{R_2}{R_2^2 + s^2 X_2^2} = \frac{E_2^2}{2X_2 \omega_s} \left[ 1 - \frac{(R_2 - sX_2)^2}{R_2^2 + s^2 X_2^2} \right] \quad (4)$$

观察(4),当  $R_2 = sX_2$  时  $T_r$  为最大值,即当  $R_2 = X_2(s-1)$  时起动的  $T_r$  为最大值。

- 14.20** 一台三相 60Hz 四极感应电动机的转子在 3Hz 下取用 120kW。试求(a)转子转数,(b)转子铜损耗。

$$s = \frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{60} = 0.05, \quad n_s = \frac{120f_1}{p} = \frac{120 \times 60}{4} = 1800 \text{ r/min}$$

$$(a) \quad n = (1-s)n_s = (1-0.05) \times 1800 = 1710 \text{ r/min}$$

(b) 由图 14-22(b),

$$\text{转子铜损耗} = I_2^2 R_2 = s \times \text{转子输入} = 0.05 \times 120 = 6 \text{ kW}$$

- 14.21** 题 14.20 的电动机有 3kW 的定子铜损耗,2kW 的机械损耗,1.7kW 的定子铁芯损耗。

试计算(a)电动机的轴上输出,(b)效率。忽略转子铁芯损耗。

由题 14.20, 转子输入是 120kW, 转子铜损耗是 6kW。

$$(a) \quad \text{电动机输出} = 120 - 6 - 2 = 112\text{kW}$$

$$(b) \quad \text{电动机输入} = 120 + 3 + 1.7 = 124.7\text{kW}$$

$$\text{效率} = \frac{\text{输出}}{\text{输入}} = \frac{112}{124.7} = 89.7\%$$

- 14.22 一台六级三相 60Hz 感应电动机在 1140r/min 下取用 48kW 功率。定子铜损耗为 1.4kW, 定子铁芯损耗为 1.6kW, 转子机械损耗为 1kW。试求电动机效率。

$$n_s = \frac{120f_1}{p} = \frac{120 \times 60}{6} = 1200\text{r/min}$$

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{1200 - 1140}{1200} = 0.05$$

由图 14-22(b),

$$\begin{aligned} \text{转子输入} &= \text{定子输出} \\ &= \text{定子输入} - \text{定子损耗} \\ &= 48 - (1.4 + 1.6) = 45\text{kW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{转子输出} &= (1 - s) \times \text{转子输入} \\ &= (1 - 0.05) \times 45 = 42.75\text{kW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{电动机输出} &= \text{转子输出} - \text{旋转损耗} \\ &= 42.75 - 1 = 41.75\text{kW} \end{aligned}$$

$$\text{电动机效率} = \frac{41.75}{48} = 87\%$$

- 14.23 一台三相感应电动机的同步转数是 900r/min。在堵住转子条件下, 电动机输入功率是 193.6A 时的 45kW。每相定子电阻是  $0.2\Omega$ , 变压比是  $a = 2$ 。试计算(a)每相转子电阻的欧姆值和(b)电动机起动转矩。定子和转子都是星形连接的。

(a)近似地,

$$R_1 + a^2 R_2 = \frac{P_i}{I_1^2} \quad \text{即} \quad 0.2 + 4R_2 = \frac{(45 \times 10^3)/3}{(193.6)^2}$$

由此可得

$$R_2 = 0.05\Omega$$

(b)相对于定子的每相转子电阻是  $R_2 = a^2 R_2 = 0.2\Omega$ , 于是

$$\text{起动转矩} = \frac{3I_1^2 R_2}{\omega_s} = \frac{3(193.6)^2 \times 0.2}{2\pi \times 900/60} = 238.6\text{N} \cdot \text{m}$$

- 14.24 关于一台 400V、60Hz 三相星形连接四极感应电动机, 图 14-22(e)等效电路的每相参数是:

$$R_1 = 2R_2 = 0.2\Omega, \quad X_1 = 0.5\Omega, \quad X_2' = 0.2\Omega, \quad X_m = 20\Omega$$

如果在 1755r/min 之下总的机械损耗和铁芯损耗是 800W, 试计算(a)输入电流, (b)输入功率, (c)输出功率, (d)输出转矩, (e)效率(全在 1755r/min 之下)。

$$n_s = \frac{120 \times 60}{4} = 1800\text{r/min}, \quad s = \frac{1800 - 1755}{1800} = \frac{1}{40}$$

由所给电路, 每相等效阻抗是

$$\begin{aligned} Z_s &= (0.2 + j0.5) + \frac{j20 \times (4 + j0.2)}{4 + j(20 + 0.2)} \\ &= (0.2 + j0.5) + (3.77 + j0.944) = 4.223 \angle 20^\circ \Omega \end{aligned}$$

且相电压是  $400/\sqrt{3} = 231\text{V}$ 。

$$(a) \quad \text{输入电流} = \frac{231}{4.223} = 54.65\text{A}$$

$$(b) \quad \text{输入总功率} = \sqrt{3}400 \times 54.65 \times \cos 20^\circ = 35.58\text{kW}$$

(c)越过气隙的总功率  $P_g$  是三个  $3.77\Omega$  电阻中的功率(见上面  $Z_s$  的表达式)。因此,

$$P_g = 3 \times (54.65)^2 \times 3.77 = 33.789 \text{ kW}$$

[或减去定子损耗,  $P_g = 35580 - 3 \times (54.65)^2 \times 0.2 = 33.788 \text{ kW}$ 。]于是发出的总功率为

$$P_d = (1 - s)P_g = 0.975 \times 33.79 = 32.94 \text{ kW}$$

而输出总功率为  $P_o = P_d - 800 \text{ W} = 32.14 \text{ kW}$ 。

$$(d) \quad \text{输出转矩} = \frac{P_o}{\omega_m} = \frac{32140}{2\pi \times 1755/60} = 174.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$(e) \quad \text{效率} = \frac{32.14}{35.58} = 90.3\%$$

### 同步电机

- 14.25 由一台 60Hz 同步发电机向一台以 5% 转差率运转的四极感应电动机供电。(a) 计算电动机的转数。(b) 如果发电机有六个磁极, 它的转数是多少?

$$(a) \quad n = (1 - s)n_s = (1 - 0.05) \times \frac{120 \times 60}{4} = 1710 \text{ r/min}$$

$$(b) \quad n_s = \frac{120f}{p} = \frac{120 \times 60}{6} = 1200 \text{ r/min}$$

表 14-1

极数	转速 $r/\text{min}$
2	3600
4	1800
6	1200
8	900
10	720
12	600

- 14.26 对于 60Hz 同步发电机, 试列举六种极数与转数的可能组合。

由  $f = p n_s / 120$  (Hz), 必有  $p n_s = 120 \times 60 = 7200 \text{ r/min}$ 。由此得表 14-1。

- 14.27 一台额定在 10kVA 和 230V 的三相星形连接圆形转子同步发电机, 有每相  $1.2\Omega$  的同步电抗和每相  $0.5\Omega$  的电枢电阻。试计算在满载且为 0.8 滞后功率因数之下的百分电压调整率。

在图 14-36 中示出了相量图, 由此图 ( $\varphi$  是负的) 可得

$$V_0 = \sqrt{(V_t \cos \varphi + I_a R_a)^2 + (V_t \sin \varphi + I_a X_s)^2}$$

$$\text{代入} \quad V_t = \frac{230}{\sqrt{3}} = 132.8 \text{ V}, \quad I_a = \frac{(10 \times 10^3)/3}{230/\sqrt{3}} = 25.1 \text{ A}$$

和其他数据, 得到:

$$V_0 = \sqrt{(106.24 + 12.55)^2 + (79.68 + 30.12)^2} = 161.76 \text{ V}$$

$$\text{于是} \quad \frac{V_0 - V_t}{V_t} \times 100\% = \frac{161.76 - 132.8}{132.8} \times 100\% = 21.8\%$$

- 14.28 对于 0.8 超前功率因数的情况重做题 14.27, 其他数据保持不变。

令  $V_t = 132.8 + j0 \text{ V}$  为参考相量。于是

$$I_a = 25.1 \times (0.8 + j0.6) \text{ A}$$

$$Z_s = 0.5 + j1.2 \Omega$$

$$I_a Z_s = -8 + j31.6 \text{ V}$$

$$V_0 = V_t + I_a Z_s = 124.8 + j31.6 \text{ V}$$

即  $V_0 = 128.7 \text{ V}$ 。由此

$$\text{百分调整率} = \frac{128.7 - 132.8}{132.8} \times 100\% = -3.1\%$$

注意这个题目已经解出而没有用相量图, 在满载且为 0.8 超前功率因数之下的电压调整率是负的。

- 14.29 对于题 14.27 的发电机, 试求出使满载下电压调整率为零的功率因数。

令  $\varphi$  是所需的功率因数角, 即  $I_a = 25.1 \angle \varphi \text{ A}$ 。

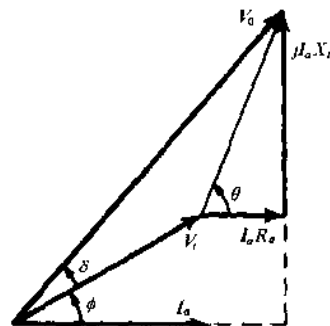


图 14-36



于是,

$$\begin{aligned} Z_s &= 0.5 + j1.2 = 1.3 \angle 67.38^\circ \quad \Omega \\ I_a Z_s &= 32.63 \angle \varphi + 67.38^\circ = 32.63 \cos(\varphi + 67.38^\circ) + j32.63 \sin(\varphi + 67.38^\circ) \quad V \\ V_0 &= 132.8 + j0 + 32.63 \cos(\varphi + 67.38^\circ) + j32.63 \sin(\varphi + 67.38^\circ) \quad V \end{aligned}$$

当电压调整率为零时,  $V_0 - V_t = 132.8V$ , 因此

$$(132.8)^2 = [132.8 + 32.63 \cos(\varphi + 67.38^\circ)]^2 + [32.63 \sin(\varphi + 67.38^\circ)]^2$$

此式给出

$$\cos(\varphi + 67.38^\circ) = \frac{32.63}{2(132.8)} \quad \text{或} \quad \varphi = +29.67^\circ$$

由此可知,  $\cos \varphi = 0.869$  超前。

- 14.30** 一台 20kVA、220V 星形连接三相凸极同步发电机在 0.707 滞后功率因数下馈给额定负载。每相电抗是  $X_d = 2X_q = 4\Omega$ 。忽略电枢电阻, 试求 (a) 功率角, (b) 百分电压调整率。

**解** (a) 由式(14.38)和图 14-31 的相量图, 及

$$V_t = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127V, \quad I_a = \frac{(20 \times 10^3)/3}{220/\sqrt{3}} = 52.5A, \quad \varphi = \arccos 0.707 = 45^\circ$$

得到

$$\tan \delta = \frac{I_a X_q \cos \varphi}{V_t + I_a X_q \sin \varphi} = \frac{52.5 \times 2 \times 0.707}{127 + 52.5 \times 2 \times 0.707} = 0.369$$

即  $\delta = 20.25^\circ$ 。

$$\begin{aligned} (b) \quad V_0 &= V_t \cos \delta + I_a X_d = V_t \cos \delta + I_a X_q \sin(\delta + \varphi) \\ &= 127 \cos 20.25^\circ + 52.5 \times 4 \sin(20.25^\circ + 45^\circ) = 309.8V \\ \text{百分电压调整率} &= \frac{309.8 - 127}{127} \times 100\% = 144\% \end{aligned}$$

- 14.31** (a) 确定由题 14.30 发电机发出的功率并验证它等于馈给负载的功率。(b) 起因于凸极性所发出的功率是多大?

**解** (a) 由式(14.40)给出每相发出的功率为

$$\begin{aligned} P_d &= \frac{309.8 \times 127}{4} \sin 20.25^\circ + \frac{127^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \sin 40.50^\circ \\ &= 3404.46 + 1309.37 = 4713.8W \end{aligned}$$

馈给每相负载的功率为  $(20 \times 10^3 \times 0.707)/3 = 4713.3W$ 。

(b) 由 (a), 起因于凸极性的功率为

$$3 \times 1309.37 = 3928W$$

- 14.32** 一组三相星形连接负载在 0.707 滞后功率因数及线间 220V 之下取用 50A 电流。一台具有  $1.27\Omega$  同步电抗的三相星形连接圆形转子同步电动机与这个负载并联连接。电动机在  $30^\circ$  功率角之下发出的功率是 33kW。忽略电枢电阻, 试计算 (a) 电动机的无功功率(按 kvar), (b) 电动机和负载的总功率因数。

**解** (a) 在图 14-37 中表示了依据每相的电路和相量图。由式(14.33),

$$P_d = \frac{33 \times 10^3}{3} = \frac{220}{\sqrt{3}} \frac{V_0}{1.27} \sin 30^\circ \quad \text{即 } V_0 = 220V$$

按图 14-37(a) 的并联连接,  $I_a X_s = V_t = (220/\sqrt{3})V$ 。然后由图 14-37(b) 中的等腰三角形

$$2\delta + 90^\circ + \varphi_a = 180^\circ \quad \text{即 } \varphi_a = 90^\circ - 2\delta = 30^\circ$$

而 电动机无功功率 =  $3V_t I_s \sin \varphi_a = 3 \frac{V_t^2}{X_s} \sin \varphi_a$

$$= 3 \frac{(220/\sqrt{3})^2}{1.27} \left( \frac{1}{2} \right) = 19000\text{var} = 19\text{kvar}$$

(b) 由图 14-37(b),  $I$  在  $V_t$  上的投影是

$$I \cos \varphi = I_a \cos \varphi_a + I_L \cos \varphi_L$$

它垂直于  $V_t$  的投影是(注意到实际  $\varphi_L$  是负的)

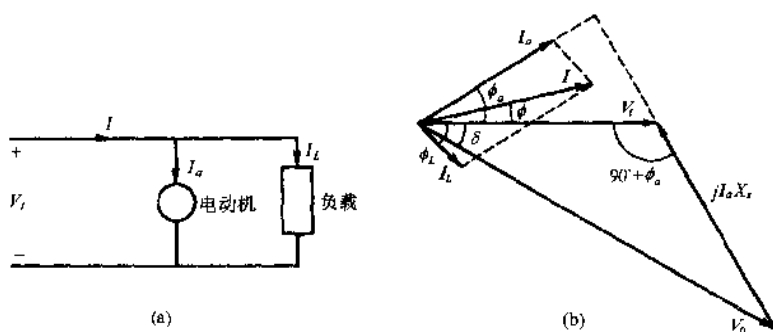


图 14-37

$$I \sin \varphi = I_a \sin \varphi_a + I_L \sin \varphi_L$$

由此

$$\tan \varphi = \frac{I_a \sin \varphi_a + I_L \sin \varphi_L}{I_a \cos \varphi_a + I_L \cos \varphi_L}$$

代入数值

$$I_a = \frac{220/\sqrt{3}}{1.27} = 100\text{A}, \quad I_L = 50\text{A}, \quad \varphi_a = 30^\circ, \quad \varphi_L = -45^\circ$$

得到  $\tan \varphi = 0.120$  即  $\cos \varphi = 0.993$  超前。

## 补充习题

### 增量运动系统

- 14.33 当励磁线圈传导 25A 直流电流时,要求图 14-38 中所示的电磁铁在有 1mm 气隙的铁块上作用 500N 的力。气隙处的铁芯横截面面积为  $600\text{mm}^2$ 。试计算所需的励磁线圈匝数。

答 65 匝

- 14.34 (a)如果用具有 35.35A 最大值的 60Hz 交流电流激励图 14-38 电磁铁的励磁线圈,为了产生 500N(平均)的力,这个线圈必须是多少匝数? (b)这个平均力是频率相关的吗?

答 (a)65 匝;(b)不是

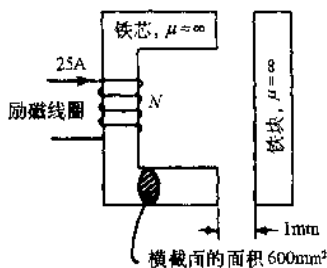


图 14-38

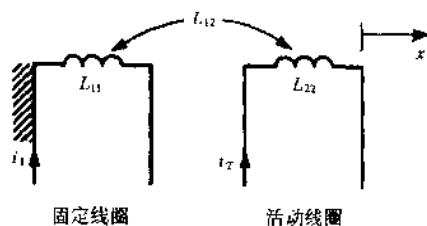


图 14-39

- 14.35 图 14-39 示出两个互相耦合的线圈,它们的

$$L_{11} = L_{22} = 3 + \frac{2}{3x} \text{ (mH)}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1}{3x} \text{ (mH)}$$

式中  $x$  以 m 计。(a)如果  $i_1 = 5\text{A}$  而  $i_2 = 0$ ,当  $x = 0.01\text{m}$  时线圈之间互相的电力是多少? (b)如果  $i_1 = 5\text{A}$ ,第二线圈开路并以  $20\text{m/s}$  的匀速在  $x$  方向上运动,试求当  $x = 0.01\text{m}$  时第二线圈两端的电压。

答 (a)83.33N;(b)333.3V

- 14.36 关于图 14-39 的两线圈系统,如果  $i_1 = 7.07\sin 377t \text{ (A)}$ ,  $i_2 = 0$ ,  $x = 0.01\text{m}$ ,试求(a)瞬时电力,(b)对时间的平均电力。

答 (a) $166.67\sin^2 377t \text{ (N)}$ ;(b)83.33N

- 14.37 (a)将图 14-39 的两个线圈串接,在其中流过 5A 直流电流。试求当  $x = 0.01\text{m}$  时线圈之间的电力。这个力使  $x$  趋向于增大还是减小? (b)然后将两个线圈并联跨接于 194V、60Hz 电源。试计算当  $x = 0.01\text{m}$  时的平均电力,忽略线圈的电阻。

答 (a)250N, 使  $x$  减小; (b)250N

### 直流电机

- 14.38 一台六极叠绕直流发电机的电枢具有 720 根有效导体。发电机被设计成在 1720r/min 之下产生 420V。试求每个磁极的磁通。

答 20.35mWb

- 14.39 将题 14.38 的电枢按波绕重新连接。为了在电枢中感应 630V, 这台发电机必须工作在什么转数下?

答 860r/min

- 14.40 为了在 4605N·m 的转矩之下发出 572kW, 一台直流电机的电枢必须以多大 r/min 转速运转?

答 1187r/min

- 14.41 一台以 1200r/min 运转的直流电机其电枢传导 45A 电流。如果感应的电枢电压是 130V, 则由电枢发出的转矩是多少?

答 46.5N·m

- 14.42 一台自并励发电机在 125V 下馈给 12.5kW 的负载。励磁电阻是 25 $\Omega$ , 电枢电阻是 0.1 $\Omega$ 。在这种负载下由于电刷接触和电枢反应的总电压降是 3.5V。试计算感应电枢电压。

答 139V

- 14.43 一个具有 720 根导体的六极叠绕电枢在每极 20.35mWb 的磁通中旋转。(a)如果电枢电流是 78A, 由电枢发出的转矩是多少? (b)如果感应电枢电压是 420V, 电动机的转数是多少?

答 (a)181.9N·m; (b)1720r/min

- 14.44 一台具有恒定励磁电流的它励电动机, 在 120V 下取用 50A 电枢电流时以 1045r/min 运转。电枢电阻是 0.1 $\Omega$ 。如果电动机的负载改变使它在 120V 下取用 95A, 试求在新负载之下的电动机转数。

答 1004r/min

- 14.45 一台长并复励发电机在 230V 之下供出 50kW。总的励磁电路和电枢电路电阻分别是 46 $\Omega$  和 0.03 $\Omega$ 。电刷接触压降是 2V。试求百分电压调整率。忽略电枢反应。

答 3.77%

- 14.46 一台它励直流发电机具有如下数据: 电枢电阻 0.04 $\Omega$ ; 励磁电阻 110 $\Omega$ ; 总的铁心和机械损耗 960W; 励磁端电压 230V。发电机在 230V 的端电压下馈给一个负载。试计算(a)发电机具有最高效率时的电枢电流, (b)发电机效率的最大值。

答 (a)189.8A; (b)93.8%

- 14.47 在每个磁极 25mWb 磁通下工作的并励电动机是叠绕的并有两个磁极和 360 根导体。电枢电阻是 0.12 $\Omega$ , 电动机被设计成工作于 115V 时在满载下取用 60A 电枢电流。(a)在启动时为了使电枢电流不应超过它满载值的两倍, 要在电枢电路中接入外加电阻; 试求这个电阻的值。(b)当电动机已达到 400r/min 转速时, 外加电阻被减去 50%。在这个转数下电枢电流是多少? (c)当电动机达到它的最终转数时, 外加电阻被完全去掉; 电枢电流就是它的满载值。试计算电动机转数。

答 (a)0.838 $\Omega$ ; (b)102A; (c)718.6r/min

- 14.48 一台具有 0.05 $\Omega$  电枢电阻和 75 $\Omega$  励磁电阻的 230V 并励电动机, 当以 1120r/min 无负载运转时吸取 7A 线电流。对于使线电流为 46A 的负载, 试求(a)电动机转数, (b)电动机效率, (c)总的铁芯和机械损耗。

答 (a) 1110.5r/min; (b) 83.9%; (c) 903.9W

### 感应电动机

- 14.49 一台三相 60Hz 感应电动机有八个磁极并当某个负载时以 0.05 的转差率运行。试计算(按 r/min)(a)转子相对于定子的转数, (b)转于相对于定子磁场的转数, (c)转子磁场相对于转子的转数, (d)转于磁场相对于定子的转数, (e)转于磁场相对子定子磁场的转数。

答 (a) 855r/min; (b) 45r/min; (c) 45r/min; (d) 900r/min; (e) 0

- 14.50 一台三相六极 60Hz 的感应电动机(a)在 1160r/min 之下无载运转, (b)在 1092r/min 之下满载运转。试求无载时和满载时的转差率和转子电流的频率。

答 (a) 0.034, 2Hz; (b) 0.09, 5.4Hz

- 14.51 一台三相 60Hz 四极感应电动机只有每相 0.8 $\Omega$  的转于漏磁电抗和每相 0.1 $\Omega$  的转于电阻。为了使电

动机具有最大的起动转矩, 必须在转子电路中接入多大的附加电阻? 为了计算请利用图 14-22(a) 的转子电路。

答  $0.7\Omega$

- 14.52 一台 20 马力、三相 400V、60Hz 四极感应电动机在 5% 转差率之下输出满载。机械旋转损耗是 400W。试计算(a)电磁转矩, (b)轴转矩, (c)转子铜损耗。

答 (a)  $85.5\text{N}\cdot\text{m}$ ; (b)  $83.3\text{N}\cdot\text{m}$ ; (c)  $806.3\text{W}$

- 14.53 一台三相六极感应电动机额定为 400Hz、150V、10 马力、在额定功率输出下的 3% 转差率。在额定转数下风阻和摩擦损耗为 200W。对于工作在额定电压、频率、转差率、功率输出的电动机, 试求(a) 转子转数, (b) 转子电流的频率, (c) 转子铜损耗, (d) 越过气隙的功率, (e) 输出转矩。

答 (a)  $7760\text{r/min}$ ; (b)  $12\text{Hz}$ ; (c)  $237\text{W}$ ; (d)  $7897\text{W}$ ; (e)  $9.2\text{N}\cdot\text{m}$

- 14.54 一台三相星形连接 12 极感应电动机额定为 500 马力、2200V、60Hz。每相定子电阻为  $0.4\Omega$ , 按定子表示的每相转子电阻为  $0.2\Omega$ , 按定子表示的每相转子和定子总电抗为  $2\Omega$ 。当施加额定电压和频率时, 电动机转差率为 0.02。对于这种条件, 求出依据每相的(a)定子电流(忽略磁化电流), (b)发出转矩, (c)转子功率输入, (d)转子铜损耗。

答 (a)  $120\text{A}$ ; (b)  $2292\text{N}\cdot\text{m}$ ; (c)  $144\text{kW}$ ; (d)  $2880\text{W}$

### 同步电机

- 14.55 (a)在 60Hz 下, (b)在 50Hz 下, 同步电机能够工作的最大转数是多少?

答 (a)  $3600\text{r/min}$ ; (b)  $3000\text{r/min}$

- 14.56 一台 25kVA 三相星形连接 400V 同步发电机具有每相  $0.05 + j1.6\Omega$  的同步阻抗。试求(a)在 0.8 滞后功率因数下, (b)在全功率因数下, (c)在 0.8 超前功率因数下的满载电压调整率。

答 (a)  $22\%$ ; (b)  $10.6\%$ ; (c)  $-5.5\%$

- 14.57 试求题 14.56 中三种情况下的功率角。

答 (a)  $7.2^\circ$ ; (b)  $13^\circ$ ; (c)  $15^\circ$

- 14.58 在半满载下使题 14.56 的发电机具有零的电压调整率。忽略电枢电阻, 试求工作功率因数和发出的功率。

答  $0.997$  超前;  $12.5\text{kW}$

- 14.59 一台 500kVA 六极 500V 三相星形连接同步发电机具有每相  $0.1 + j1.5\Omega$  的同步阻抗。如果在  $1000\text{r/min}$  下驱动这台发电机, 所产生电压的频率是多少? 求出在满载且为 0.8 滞后功率因数时的励磁电压和功率角。

答  $50\text{Hz}$ ;  $1098\text{V}$ ;  $37.6^\circ$

- 14.60 一台 100kVA、400V 星形连接凸极同步发电极在满载和 0.8 超前功率因数下运转。如果每相的  $X_d = 2X_q = 1.1\Omega$  且  $R_a$  是可忽略的, 试计算(a)电压调整率, (b)功率角, (c)发出功率。

答 (a)  $-28.7\%$ ; (b)  $15.5^\circ$ ; (c)  $80\text{kW}$

- 14.61 一台 30kVA 三相 230V 星形连接同步发电机具有每相  $0.8\Omega$  的同步电抗。电枢电阻是可忽略的。试计算(a)在 0.8 超前功率因数下满载时, (b)在全功率因数下 50% 满载时, (c)在 0.8 滞后功率因数下满载时的百分电压调整率。

答 (a)  $-18.7\%$ ; (b)  $2.5\%$ ; (c)  $7.2\%$

- 14.62 一台 400V 三相星形连接圆形转子同步电动机当发出  $60\text{kW}$  功率时工作在全功率因数下。如果每相的同步电抗是  $1.0\Omega$  而电枢电阻是可忽略的, 试计算(a)每相的感应电压, (b)功率角。

答 (a)  $246.6\text{V}$ ; (b)  $-20.5^\circ$

- 14.63 一台过励磁的 2300V 三相星形连接同步电动机在  $-21^\circ$  的功率角之下运转。每相同步阻抗为  $0.1 + j2\Omega$ 。如果电动机取用 350A 的线电流, 试求功率因数。

答  $0.87$  超前

- 14.64 如果题 14.63 电动机的内部感应电压与线电压是相同的且功率角是  $-20^\circ$ , (a)功率因数和(b)线电流各是多少? (c)求发出功率。

答 (a)  $0.99$  滞后; (b)  $242\text{A}$ ; (c)  $938\text{kW}$

- 14.65 一台 400V 三相圆形转子同步电动机当输出 18 马力(轴上的)时具有 92% 的效率。每相同步阻抗是  $0.5 + j1.5\Omega$ 。如果电动机工作在 0.9 滞后功率因数下, 试求(a)功率角, (b)励磁电流。在图 14-40 中示

出了电动机饱和特性。

答 (a)  $-7.4^\circ$ ; (b)  $4.5\text{A}$

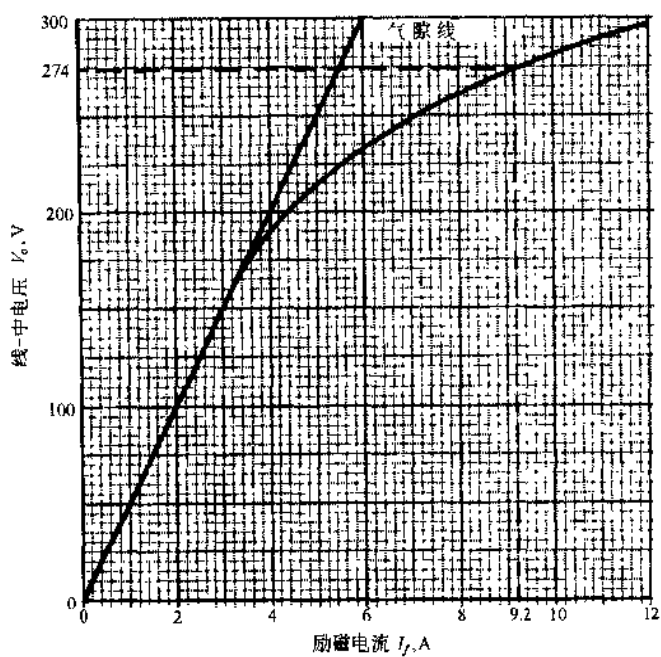


图 14-40

- 14.66 一台过励磁同步电动机跨接在具有 0.8 滞后功率因数的 100kVA 电感性负载上。当电动机空转(无负载)时取用 10kW 功率。如果要求电动机能使总的功率因数成为全的, 试计算它的额定 kVA。电动机不用于带动任何负载。

答 60.8kVA

控制系统是互相联系的一群元件,由源点向使用点引导或调整(控制)能量,或施加约束。为了便于接受,控制系统必须具备使所有相关观测者满意的物理性质和运行特征。物理性质可以仅限于应用,由于经常受到经济的限制,物理性质给设计者提出较高的要求。然而,由于不同的物理系统具有运行相似性,使我们可以构建一套系统的控制系统理论。

### 15.1 定义和术语

1. 设备是希望对其进行控制的原初或基本系统,也称为被控系统。
2. 控制元件或控制器是向设备施加控制信号的机构,这个信号体现为系统操纵变量的变化。
3. 被控变量是被调整设备的特征,通常设备输出就是被控变量。
4. 参考指令或参考输入是为了促成设备的特定作用(即被控变量的特定值)而施加至控制系统的外部信号。
5. 干扰输入是设备不希望有的激励源,它会对被控变量的值起作用。
6. 比较器是一种控制系统元件,它对两个或更多的信号进行比较(加或减)。
7. 反馈是控制系统的特性,由此将输出(被控变量)与参考输入进行比较,产生一个取决于输出和输入二者的动作信号或控制力,这个信号将驱动控制器运行。在没有反馈的控制系统中,参考输入就作为动作信号。
8. 反馈元件将被控变量转变成可以直接与参考指令进行比较的形式(反馈信号)。

### 15.2 系统分类

控制系统可以按照它们所需的外部介入者进行分类。在人工控制系统中,有智慧的人正是构成相互关联的元件之一。全部相互关联的元件都是非智慧成分的控制系统称为自动控制系统。大多数控制系统理论的中心集中在后一种类型之上。

**例 15.1** (a)人扳动电灯开关照亮变暗的房间可以构成一个人工控制系统。开关和灯泡是设备,以光通量(按流明计)作为被控变量或输出。开关手柄的移动是动作信号或控制力。(b)汽车司机调节加速器压低程度以保持所需速度是一个人工控制系统。加速器踏板、连杆、汽化器蝶形阀的移动是动作信号。发动机和传动轮系可以看做设备。(c)通过利用光电管测定黑暗程度的电路启动继电器用作电灯开关是一个自动控制系统。光电管和开关电路看作向设备提供控制力(继电器线圈电压)的控制器,设备包括继电器和灯泡。(d)机械闹钟构成一个自动控制系统,其中铃(设备)发出响声(被控变量)。控制力来源于时钟指时运动和连杆的铃锤止动装置的缩回。

控制系统的另一种分类法是按照它们所利用的反馈进行分类。开环控制系统具有不依赖于系统中任何其他变量的动作信号。控制力以某种方式依赖于输出或其他间接被控变量(利用反馈)的控制系统称为闭环控制系统。闭环控制系统又可分成两个类别。调节器系统必须按它的原函数将被控变量保持在特定的范围内,与干扰输入的存在无关,它的参考指令不常改变。随动系统是需要频繁改变的参考指令与被控变量之间保持密切一致的一种系统。

**例 15.2** (a)壁炉可以看作是一个开环控制系统。系统输出是与不依赖于房间温度的木块燃烧成一比率的热。(b)温度自动调节的家庭加热装置构成闭环控制系统。由温调器中的双金属片测定房间温度,由它的膨胀移动(反馈信号)作用至末端水银开关。

**例 15.3** (a)题 15.2(b)的家庭加热装置是调节器系统。双金属片由预先校准的环形机构定位(参考指令),当与房间所需温度一致时,片的膨胀量致使水银开关成为“断”。在已经达到舒适的房间温度之后,参考指令经常是不改变的。(b)空对空热寻的导弹的控制系统是随动系统,不断地调节导弹的方向舵以保持朝着其目标飞机排气热的方向。

控制系统根据对变量的描述可以进行又一种分类。在连续(变量)系统中,全部变量都是连续的、可微分的时间函数,因此可以用微分方程描述系统的过程。离散(变量)系统具有至少一种,仅在特定瞬时才可知的变量,需要用差分方程描述。

**例 15.4** (a)飞球调控内燃发动机是一个连续变量控制系统的例子。在全部时间内监测发动机转速,且可以将燃料流速调节为任意的恒定值。(b)转速计利用微处理器统计 60 齿的齿轮在一秒钟内通过参考点的齿数;然后将这个计数除以 60 得出每秒旋转的转数。如果将这个转速计函数作为控制系统中的转速反馈元件,由于每秒仅只一次知道转速的值,因此这个控制系统是离散变量系统。

### 15.3 功能方框图

我们可以用一种流程图来表示在 15.1 节中所概述控制系统的工作,这种流程图称为系统的功能方框图,如图 15-1。当然,各  $r(t)$ 、 $q(t)$ 、 $c(t)$  可以表示多种信号。

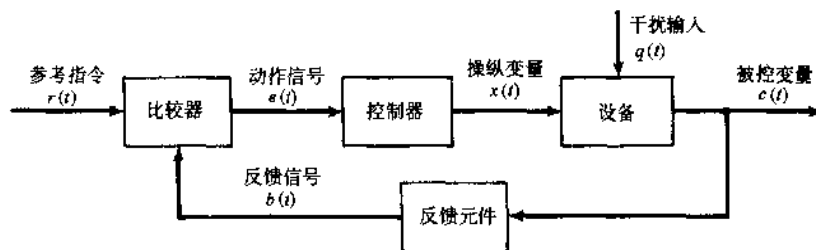


图 15-1

一般画出功能方框图作为建立联系  $c(t)$ 、 $r(t)$ 、 $q(t)$  正式数学关系的准备。

**例 15.5** 做出一个开环房间加热系统的功能方框图,包括燃气炉空间加热器以及构成干扰的破碎窗玻璃。

**解** 见图 15-2。被火焰加热的空气和通过破碎窗玻璃的冷空气是热流方程中的强制函数,热流方程描述房间加热过程并确定作为系统输出的房间温度。



图 15-2

**例 15.6** 绘出例 15.4(a)飞球调控发动机的功能方框图。

**解** 见图 15-3,其中限制弹簧作用作为参考指令而发动机转速是被控变量。

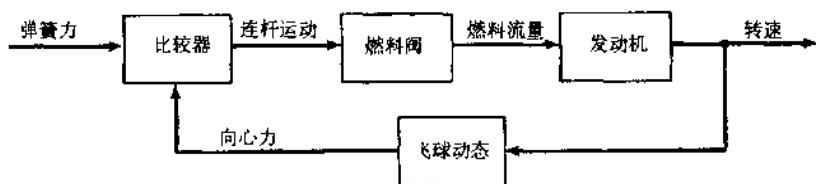


图 15-3

### 15.4 传递函数

关于(线性)控制系统的分析,首先的要求是必须能够用数学函数描述系统的每个物理局部。然后将这些数学模型组合起来产生系统的合成数学模型,通常采取以时间为自变量的微分方程形式。6.3 节的拉普拉斯变换方法提供了解答这种方程的最简捷途径。

通过系统局部的传输路径上传递函数定义为,当全部初始条件取为零(即这个局部是初始“松弛的”或未贮能的)时的局部输出信号拉普拉斯变换与局部输入信号拉普拉斯变换之比。由于任何非零初始条件都可以最后推导成如同输入(见题 16.4),上述假设并不表示实际的限制。

**例 15.7** 如果图 15-1 中的  $q(t) \equiv 0$  (没有干扰输入), 则设备的传递函数为  $G_1(s) = C(s)/X(s)$ 。

**例 15.8** 假定图 15-1 的设备是线性的并且存在干扰输入。由叠加,  $c(t)$  有归因于  $x(t)$  的分量和归因于  $q(t)$  的分量; 于是传递函数与两个输入-输出路径相联系。这些传递函数是例 15.7 中所求的  $G_1(s)$  和按  $x(t) \equiv 0$  计算的  $G_2(s) = C(s)/Q(s)$ 。于是有

$$\mathcal{L}\{c(t)\} = G_1(s)X(s) + G_2(s)Q(s)$$

这样得出被控变量是

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)X(s) + G_2(s)Q(s)\}$$

#### 电气元件的传递函数

在第 5 章的解答题中(虽然在那一章中没有给出比例 $\frac{\text{输出变换}}{\text{输入变换}}$ 的专有名称)以及在第 10 章中(如例 10.7)曾举例说明电气电路元件传递函数的计算。下面再给出几个例题。

**例 15.9** 如果设想  $v_i(t)$  是输入而  $i(t)$  是输出, 试求出图 15-4 网络的传递函数。端点  $ab$  是开路的。

**解** 由 KVL,

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1)$$

假定为零初始条件并将拉普拉斯变换(表 5-1)应用至(1)获得

$$V_i(s) = RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) \quad (2)$$

解(2)求输出变换与输入变换的比, 给出传递函数为

$$F(s) \equiv \frac{I(s)}{V_i(s)} = \frac{sC}{sRC + 1}$$

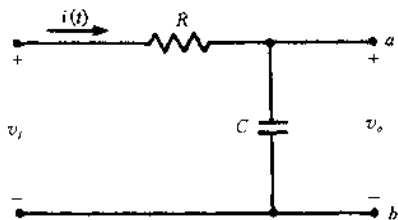


图 15-4

**例 15.10** 当设想  $v_i(t)$  为输入而设想  $v_o(t)$  为输出时, 试求出图 15-4 RC 滤波器网络的传递函数。端点  $ab$  是开路的。

**解** 将电压分配应用至图 15-4 的  $s$  域模型, 立刻给出

$$F(s) \equiv \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/sC}{R + (1/sC)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

**例 15.11** 试求图 15-5 直流伺服电动机的传递函数, 图中励磁电流( $i_f$ )是恒定的。将轴方位角  $\theta(t)$  设想为输出并将端电压  $v_T(t)$  设想为输入。参数  $J(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$  是电动机电枢和所连负载的组合转动惯量;  $\beta(\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad})$  是为了计算负载旋转损耗的黏滞摩擦系数。

**解** 在恒定励磁电流的假定下, 式(14.11)给出反电动势为  $e(t) = k \dot{\theta}(t)$ 。由 KVL 给出电枢电流



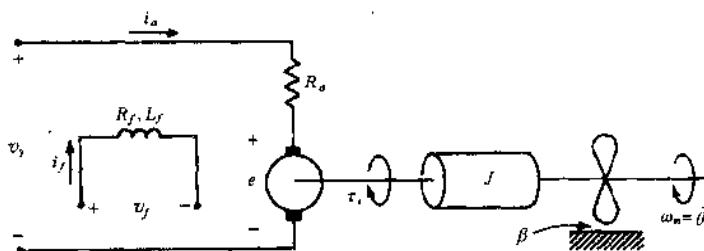


图 15-5

$$i_a(t) = \frac{v_T(t) - e(t)}{R_a} = \frac{v_T(t)}{R_a} - \frac{K\dot{\theta}(t)}{R_a}$$

而且现在式(14.13)给出轴转矩为

$$\tau_e(t) = K i_a(t) = \frac{K}{R_a} v_T(t) - \frac{K^2}{R_a} \dot{\theta}(t)$$

对旋转运动用牛顿第二定律, 轴外加电枢的净转矩必定等于其动量矩对时间的变率:

$$\begin{aligned} \tau_e(t) - \beta \dot{\theta}(t) &= J \ddot{\theta}(t) \\ J \ddot{\theta}(t) + \left( \beta + \frac{K^2}{R_a} \right) \dot{\theta}(t) &= \frac{K}{R_a} v_T(t) \end{aligned}$$

在零初始条件下, 将拉普拉斯变换应用于这个微分方程, 得到

$$F(s) = \frac{\Theta(s)}{V_T(s)} = \frac{K/R_a}{s[J s + \beta + (K^2/R_a)]}$$

#### 机械元件的传递函数

可以将机械系统分类为平移的和旋转的。用于描述平移系统的元件是质量(贮存动能)、线性弹簧(贮存势能)、线性黏滞阻尼器(引起摩擦力)。旋转系统的模拟元件是转动惯量、扭转弹簧、扭转黏滞阻尼器。

机械系统的自由度数( $N$ )是在任意时刻系统中的节点(独立运动的点)数目。令  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 是与机械系统第  $i$  节点有关的广义坐标。令  $\mathcal{F}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 代表与广义坐标  $q_i$  有关的广义施加力(或旋转系统的转矩); 当  $\mathcal{F}_i$  使  $q_i$  趋向于增大时  $\mathcal{F}_i$  为正。进一步定义三个能量函数如下:

$\mathcal{T}$  以广义坐标和其时间导数表示的, 与系统中各元件有关的全部动能之和

$\mathcal{V}$  以广义坐标表示的, 与系统中各元件有关的全部势能之和

$\mathcal{D}$  以广义坐标的时间导数表示的, 与系统中各元件有关的全部耗散函数之和

于是, 机械系统的拉格朗日运动方程是

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (15.1)$$

在表 15-1 中给出了  $\mathcal{T}$ 、 $\mathcal{V}$ 、 $\mathcal{D}$  的公式。

表 15-1

元件型式	广义坐标 $q$	广义速度 $\dot{q}$	动能 $\mathcal{T}$	势能 $\mathcal{V}$	耗散函数 $\mathcal{D}$
平移的	$x$	$\dot{x}$	$\frac{1}{2} M \dot{x}^2$	$\frac{1}{2} k x^2$	$\frac{1}{2} \beta \dot{x}^2$
旋转的	$\theta$	$\dot{\theta}$	$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2} k \theta^2$	$\frac{1}{2} \beta \dot{\theta}^2$

**例 15.12** 试求图 15-6 质量弹簧缓冲器系统的传递函数, 图中  $p(t)$  是施加的外力。

**解** 拉格朗日能量函数是  $\mathcal{T} = (1/2) M \dot{x}^2$ ,  $\mathcal{V} = (1/2) k x^2$ ,  $\mathcal{D} = (1/2) \beta \dot{x}^2$ 。应用式(15.1)并注

意  $p(t)$  的作用使  $x(t)$  增大, 有

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = p(t) \quad (1)$$

在(1)上利用拉普拉斯变换, 并对于传递函数求解, 给出

$$F(s) \equiv \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{s^2 M + s\beta + k}$$

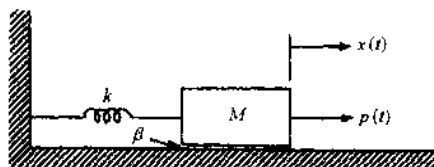


图 15-6

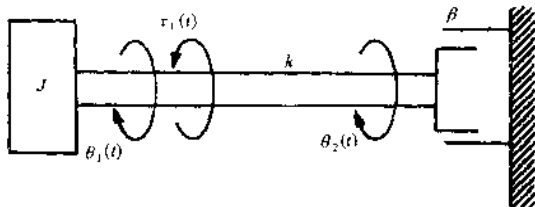


图 15-7

**例 15.13** 对于具有外施转矩  $\tau_1(t)$  的图 15-7 旋转系统, 试求出传递函数  $\Theta_1(s)/T_1(s)$  和  $\Theta_2(s)/T_1(s)$ 。

**解** 拉格朗日能量函数是

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2, \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2, \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_2^2$$

注意  $N=2$  和转矩  $\tau_1(t)$  的作用使  $\theta_1(t)$  减小, 应用式(15.1)有

$$J\ddot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = -\tau_1(t) \quad (1)$$

$$\beta\ddot{\theta}_2 - k(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2)$$

将拉普拉斯变换应用于(1)和(2)导出

$$(s^2 J + k)\Theta_1(s) - k\Theta_2(s) = -T_1(s) \quad (3)$$

$$-k\Theta_1(s) + (s\beta + k)\Theta_2(s) = 0 \quad (4)$$

(3)和(4)的联立求解得出

$$\frac{\Theta_1(s)}{T_1(s)} = \frac{-(s\beta + k)}{s(s^2 J\beta + sJk + k\beta)}$$

$$\frac{\Theta_2(s)}{T_1(s)} = \frac{-k}{s(s^2 J\beta + sJk + k\beta)}$$

### 15.5 热流量关系和液体流量关系

热系统倾向于是非线性的, 但是在繁琐的非线性分析之前, 可以利用一阶近似获得对系统的理解。在导出电阻模拟和电容模拟两个概念之后, 利用能量的守恒, 可以做出对热流的初步分析。

考虑在导热物体与恒温容器之间的界面。对于一阶, 傅里叶定律给出

$$Q = -hA\Delta T = -hA(T - T_r) \quad (15.2)$$

式中  $Q \equiv$  进入物体的热流量, W

$h \equiv$  传热系数,  $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$  或  $\text{W}/\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

$A \equiv$  界面的面积,  $\text{m}^2$

$T \equiv$  物体的温度, K 或  $^\circ\text{C}$

$T_r \equiv$  容器的温度, K 或  $^\circ\text{C}$

(如果  $T$  超过  $T_r$ , 热流就是由物体向容器。)将式(15.2)与欧姆定律

$$i = \frac{-\Delta v}{R}$$

比较, 式中  $\Delta v$  是  $R$  两端的电压升, 定义

$$\text{热阻} \equiv R_t = \frac{1}{hA} \quad (15.3)$$

此外,假定物体不做功,热力学第一定律要求进入物体的热流量等于它内能的增加率。

$$Q = \frac{d}{dt}(mcT) = mc \frac{dT}{dt} \quad (15.4)$$

式中  $m$  为物体的质量, kg

$c$  为物体的比热容, J/kg·K 或 J/kg·°C

式(15.4)与电气的电容方程

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

的比拟,导出定义

$$\text{热容} \equiv c_t = mc \quad (15.5)$$

**例 15.14** 如果例 15.5 中的破碎玻璃已被修复而只通过墙壁向室外散失热量,试求出描述房间温度变化的动态方程。假定房间中的空气在任意时刻都是均一温度的。墙壁具有热阻  $R_{tw}$ , 房间空气具有热容  $C_a$ , 室外温度为  $T_o$  (恒定值)。

**解** 假定空间加热器有恒定输出  $Q_h$  (W)。房间向室外损失热量的速率

$$Q_o = + \frac{1}{R_{tw}}(T - T_o) \equiv \frac{1}{R_{tw}}T_\delta$$

式中  $T_\delta$  是房间相对于室外的温度。因此向房间空气的净热流入量是  $Q_h - Q_o$ , 而且这个必定等于房间空气内能的增加速率:

$$Q_h - \frac{1}{R_{tw}}T_\delta = C_a \frac{dT}{dt} = C_a \frac{dT_\delta}{dt}$$

或

$$\frac{dT_\delta}{dt} + \frac{1}{R_{tw}C_a}T_\delta = \frac{Q_h}{C_a}$$

上面动态方程的稳态解显然是  $T_\delta = R_{tw}Q_h$ 。

要讨论的线性、不可压缩的液体流量问题是两类:(1)含有液面的,(2)使用阀门的液体动力系统。两种类型都必须遵守能量守恒和质量守恒,其中后者采取

$$q = Av = \text{常数} \quad (15.6)$$

形式,式中  $q$  为体积流量,  $\text{m}^3/\text{s}$ ;  $A$  为局部截面积,  $\text{m}^2$ ;  $v$  为局部流速,  $\text{m}/\text{s}$ 。

为了模拟经过阀门或其他缩颈处的压强变化( $P$ ),适宜于定义一个液阻( $R_h$ ):

$$R_h \equiv \frac{P}{q} \quad (15.7)$$

通常,假定跨过阀门有恒定的压强降落,导致通过阀门的流量与它的通口( $x$ )成比例,即

$$q = k_v x \quad (15.8)$$

**例 15.15** 在图 15-8 中示出了导阀控制液压传动装置。有机械反馈,使得  $y(t)$  被  $x(t)$  控制。试求出传递函数  $Y(s)/X(s)$ 。

**解** 通过导柱阀的液体流量由阀相对于传动装置机体的位移  $x' = x - y$  确定。实际上,若  $x > y$ , 式(15.8)给出进入主油缸左室的流量

$$q_{x'} = k_v x' = k_v(x - y) \quad (1)$$

适应于这个流入量,左室必定以速率  $A\dot{y}$  膨胀,

$$A\dot{y} = k_v(x - y) \text{ 即 } A\dot{y} + k_v y = k_v x \quad (2)$$

左室将以这个相同的速率收缩,由于不可压缩性,右排出油流量将等于  $q_{x'}$ 。很容易验证(2)也包含  $x < y$  情况。

取(2)的拉普拉斯变换,求出:

$$F(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_v}{As + k_v}$$

由于当 $|x|$ 成为太大时(1)不再有效,所以这个变换函数表达式只是近似的。

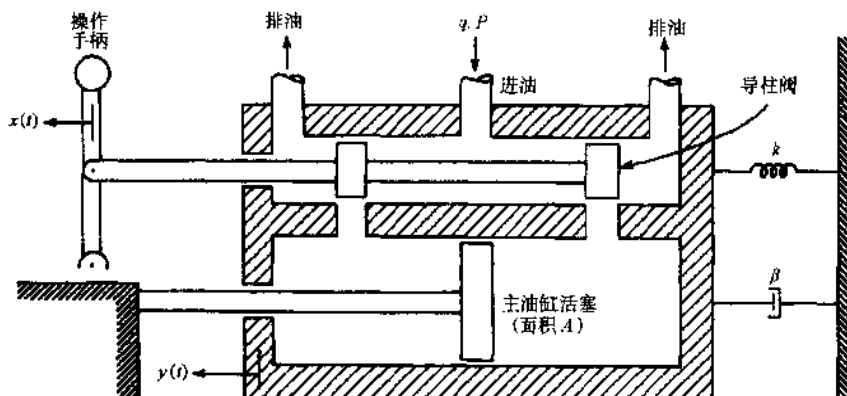


图 15-8

### 例题解答

- 15.1 在图 15-9(a)定位控制系统中示出了一台恒定电枢电流直流伺服电动机。试画出系统的功能方框图。

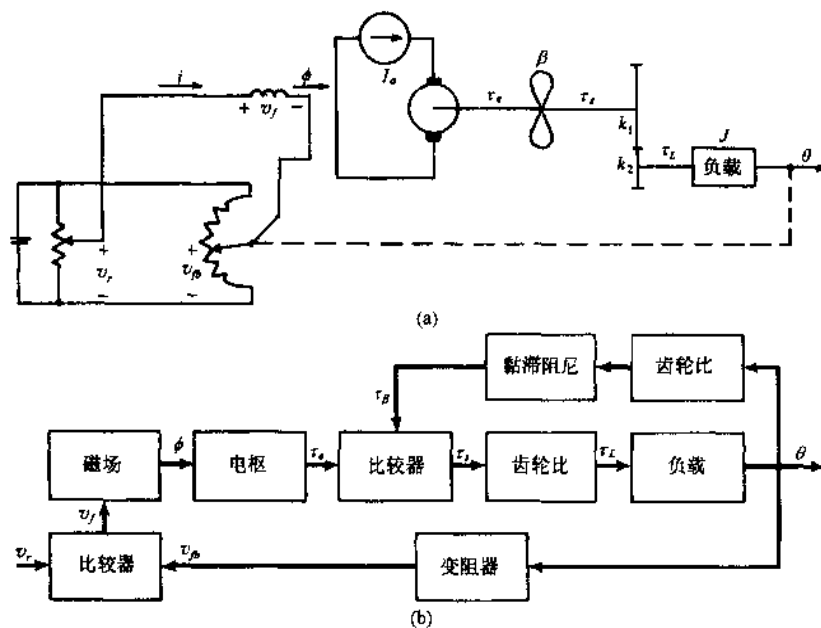


图 15-9

操作者用变动 $v_r$ 设定所希望的位置。在图 15-9(b)中表示了标有信号的功能方框图。将电动机电枢惯量与负载惯量归并在一起。

- 15.2 图 15-10(a)的恒定转速发动机同时驱动一台直流发电机和一台励磁发电机。来自直流发电机输出的电压反馈用于构成电压调整器。试画出系统的功能方框图。

电压 $v_r$ 是参考指令。被控变量是直流发电机电端电压 $v_f$ 。在图 15-10(b)中给出了功能方框图。

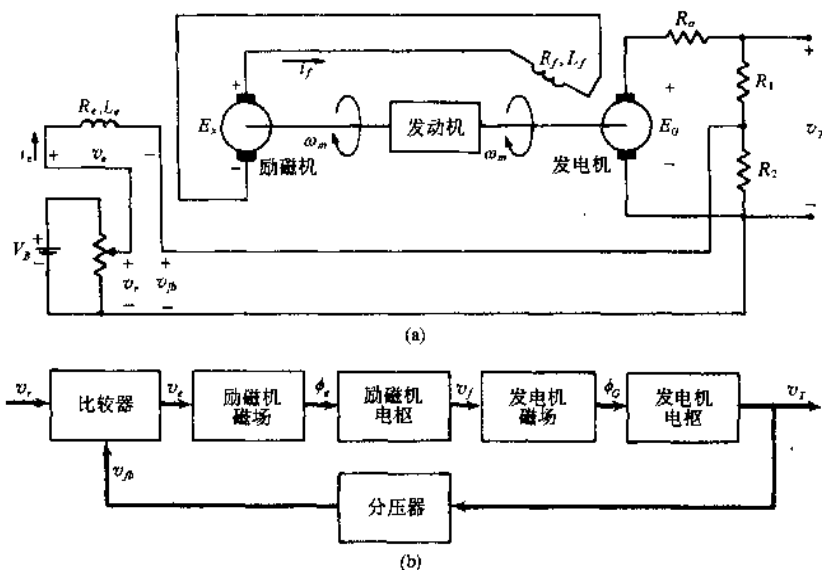


图 15-10

## 15.3 试画出例 15.2(b)系统的功能方框图。

参考指令将是设定温调器所要求的房间温度。温调器还包含用作比较器基本部分的双金属片。加热炉燃料阀的启动方式是接通/断开控制。在图 15-11 中给出了功能方框图。

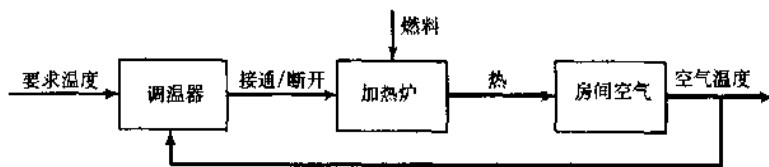


图 15-11

## 15.4 试画出例 15.1(c)光电管控制电灯的功能方框图。

对于这个开环系统的参考指令是户外光线的缺乏。被控变量是室内即房间的光线。在图 15-12 中显示了功能方框图。

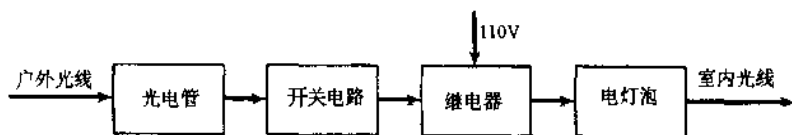


图 15-12

15.5 如果起因于冲激  $2\delta(t)$  的系统输出由 (a)  $12e^{-3t}$ , (b)  $5e^{-7t} + 6e^{-2t}$ , (c)  $6t^2$ , (d)  $e^{-2t} \cos \omega t$  给出, 试求出系统的传递函数。

因为输入的拉普拉斯变换是 2, 所以传递函数是输出的拉普拉斯变换之半。

$$(a) \quad F(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{12e^{-3t}\} = \frac{1}{2} \left( \frac{12}{s+3} \right) = \frac{6}{s+3}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{5e^{-7t} + 6e^{-2t}\} = \frac{5/2}{s+7} + \frac{3}{s+2} = \frac{(11/2)s + 26}{s^2 + 9s + 14}$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{6t^2\} = \frac{6}{s^3}$$

$$(d) \quad F(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos \omega t\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{s+7}{(s+7)^2 + \omega^2} \right] = \frac{s+7}{2(s^2 + 14s + 49 + \omega^2)}$$

15.6 图 15-5 的直流伺服电动机是磁场控制的, 具有恒定的电枢电流 ( $i_a$ )。试求出输出转速

( $\omega_m$ ) 对于输入励磁电压( $v_f$ )的传递函数。假定为磁线性。

应用 KVL 至励磁电路, 得到

$$v_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (1)$$

由于电枢电流是恒定的而且磁线性占优势, 使电动机发出转矩与  $i_f$  成比例, 即  $\tau_e(t) = K i_f(t)$ 。由牛顿定律,

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + \beta \omega_m = \tau_e(t) = K i_f(t) \quad (2)$$

取(1)和(2)的拉普拉斯变换, 并且联立求解这两个方程得出传递函数:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_f(s)} = \frac{K'}{(sJ + \beta)(sL_f + R_f)}$$

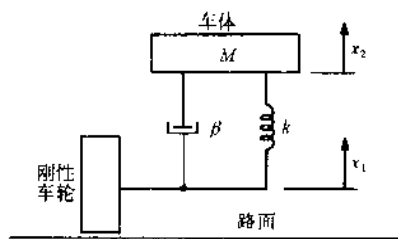


图 15-13

15.7 在图 15-13 中模拟了汽车悬置系统, 图中缓冲器表示一个震动吸收器。如果将路的外形设想为输入, 将车体的位移设想为输出, 试求出传递函数。

拉格朗日能量函数是

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2, \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2,$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$$

节点 2 的拉格朗日运动方程是

$$M \ddot{x}_2 + \beta (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

这个方程的拉普拉斯变换得出传递函数为

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{s\beta + k}{s^2 M + s\beta + k}$$

15.8 对于图 15-14 的扭转系统, 试求传递函数  $\Theta_1(s)/T_2(s)$  和  $\Theta_2(s)/T_2(s)$ 。

拉格朗日能量函数是

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2, \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2, \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_2^2$$

然后由式(15.1), 得

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_1 + k_2) \theta_1 - k_2 \theta_2 = 0$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + \beta \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 - k_2 \theta_1 = \tau_2(t)$$

对于这个系统应用拉普拉斯变换, 并联立求解  $\Theta_1(s)$  和  $\Theta_2(s)$  导出

$$\frac{\Theta_1(s)}{T_2(s)} = \frac{k_2}{\Delta}, \quad \frac{\Theta_2(s)}{T_2(s)} = \frac{J_1 s^2 + k_1 + k_2}{\Delta}$$

式中  $\Delta = J_1 J_2 s^4 + \beta J_1 s^3 + (J_2 k_2 + J_2 k_1 + J_1 k_2) s^2 + \beta(k_1 + k_2) s + k_1 k_2$ 。

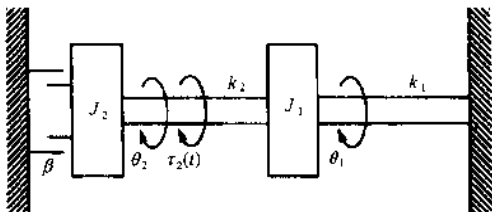


图 15-14

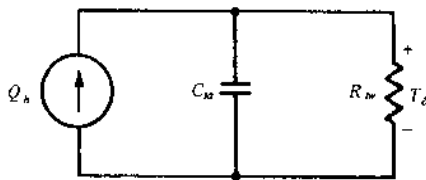


图 15-15

15.9 用电气模拟重做例 15.14。

在模拟之下, 热对应于电流而温度差对应于电位差。在图 15-15 中给出了这个房间/加热器系统的等效电路; 由 KCL 得出

$$Q_h = C_w \frac{dT_d}{dt} + \frac{T_d}{R_w}$$

这就是在例 15.14 中求出的动态方程。

- 15.10 图 15-16 中的两个级联液体箱构成一个系统, 在体积流量为  $q_i(t)$  之下接受重量密度为  $\gamma(\text{N/m}^3)$  的液体。设想  $y_1(t)$  是输出, 试求出传递函数  $Y_1(s)/Q_i(s)$ 。

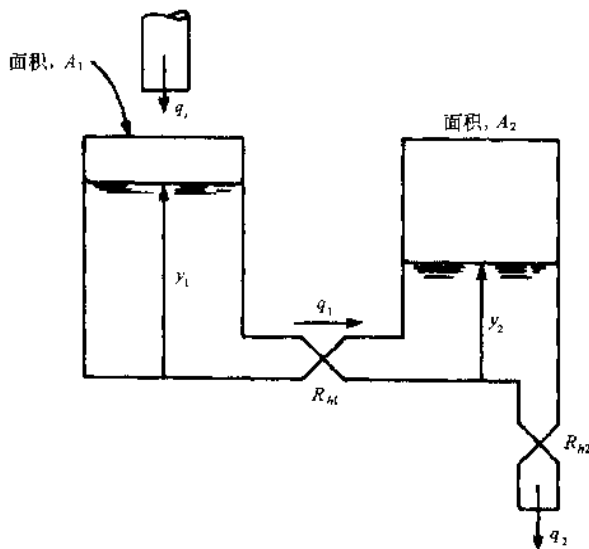


图 15-16

跨过液阻  $R_{k1}$  的压强降落 ( $P_1$ ) 是  $\gamma(y_1 - y_2)$ 。利用式 (15.7)

$$q_1 = \frac{P_1}{R_{k1}} = \frac{\gamma(y_1 - y_2)}{R_{k1}} \quad (1)$$

而不可压缩性要求

$$q_i - q_1 = A_1 \frac{dy_1}{dt} \quad (2)$$

将 (1) 代入 (2) 并移项得出

$$A_1 \frac{dy_1}{dt} + \frac{\gamma}{R_{k1}} (y_1 - y_2) = q_i \quad (3)$$

由于第二个液体箱排向大气压强, 使跨过  $R_{k2}$  的压强降落是  $P_2 = \gamma y_2$ 。所以

$$A_2 \frac{dy_2}{dt} = q_1 - q_2 = q_1 - \frac{\gamma y_2}{R_{k2}} \quad (4)$$

将 (1) 代入 (4) 得到

$$A_2 \frac{dy_2}{dt} + \left( \frac{\gamma}{R_{k1}} + \frac{\gamma}{R_{k2}} \right) y_2 - \frac{\gamma}{R_{k1}} y_1 = 0 \quad (5)$$

现在对 (3) 和 (5) 施加拉普拉斯变换, 并解这两个所得的联立方程求  $Y_1(s)$ , 得出

$$F(s) \equiv \frac{Y_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{sA_2 + \left( \frac{\gamma}{R_{k1}} + \frac{\gamma}{R_{k2}} \right)}{s^2 A_1 A_2 + s \left[ \frac{\gamma}{R_{k1}} (A_1 + A_2) + \frac{\gamma}{R_{k2}} A_1 \right] + \frac{\gamma^2}{R_{k1} R_{k2}}}$$

- 15.11 图 15-17 表示一个水银温度计。如果将温度计放进恒定的环境温度  $T_a$  中, 试求出联系水银柱温度 ( $T$ ) 与环境温度的微分方程。令  $R_g$  是玻璃壁的热阻,  $C_m$  是水银的热容。

由式 (15.2), 传给水银柱的热是

$$Q_g(t) = -\frac{1}{R_g} (T - T_a) \quad (1)$$

这里  $Q_g$  必须显示为增加的水银内能:

$$-\frac{1}{R_g} (T - T_a) = C_m \frac{dT}{dt} \quad \text{或} \quad \frac{dT}{dt} + \frac{1}{R_g C_m} T = \frac{T_a}{R_g C_m}$$

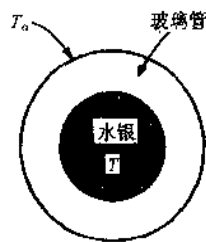


图 15-17

## 补充习题

- 15.12 如果系统对  $t=0$  时单位跃函数的响应是  $c(t) = 10 + 5\sin 2t (t \geq 0)$ , 试求出系统的传递函数。

答  $10 + \frac{10s}{s^2 + 4}$

- 15.13 在互换图 15-4 的  $R$  与  $C$  之后, 求出传递函数  $V_o(s)/V_i(s)$ 。

答  $sRC/(sRC + 1)$

- 15.14 如果设想一般  $RLC$  并联电路的施加电压是输入, 总的电路电流是输出, 试写出它的传递函数。

答  $Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$

- 15.15 试求出例 15.11 中直流伺服电动机联系转速( $\omega_m$ )与端电压的传递函数。[提示:  $\Omega_m(s) = s\Theta(s)$ ]

答  $\frac{K/R_a}{Js + \beta + (K^2/R_a)}$

- 15.16 如果例 15.11 中直流伺服电动机的电枢电流( $i_a$ )是输入而轴的方位角( $\theta$ )是输出, 试求出它的传递函数。

答  $\Theta(s)/I_a(s) = K/[s(Js + \beta)]$

- 15.17 试证明例 15.11 的直流伺服电动机当  $R_a \rightarrow 0$  时成为一个积分器。

答  $\frac{\Theta(s)}{V_T(s)} \rightarrow \frac{1}{Ks}$

- 15.18 试证明若取消了反馈, 则例 15.15 的传动装置成为一个积分器。

答 若  $x \equiv \dot{x}$ , 则  $A\dot{y} = k_v x$ , 即  $y(t) = (k_v/A) \int x(t) dt$

- 15.19 图 15-18 的浮阀在所关心范围内遵守  $q_i = k_v y_c(a)$  试求出描述  $y(t)$  特性的微分方程。(b) 液体箱的排空条件是什么? (c) 在什么条件下箱中的液面保持不变?

答 (a)  $A \frac{dy}{dt} + \left( \frac{\gamma}{R_{ho}} - k_v \right) y = 0$ ; (b)  $\frac{\gamma}{R_{ho}} > k_v$ ; (c)  $\frac{\gamma}{R_{ho}} = k_v$

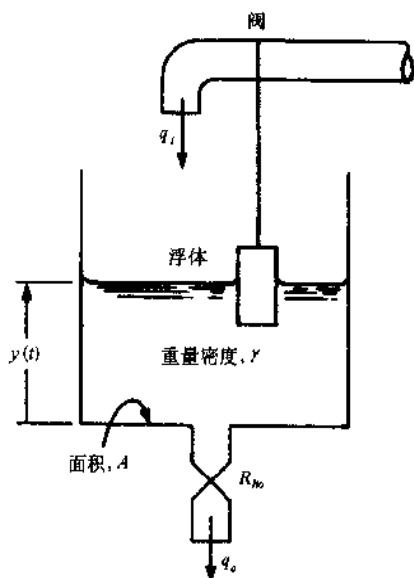


图 15-18

- 15.20 图 15-19 的热交换器必须从具有体积流量  $q_h$  的液体中取出  $Q_0 (J/m^3)$  的热能。入口冷却水是一定的温度  $T_1$ 。冷却水在进入热交换器后经充分搅和达到均匀温度  $T_2$ 。通过热交换器外壁没有热损失。冷却水的热容是  $C_w$ , 水的比热容是  $c_w$ , 水的密度是  $\rho_w (kg/m^3)$ 。试求出支配出口冷水温度( $T_2$ )的方程。

答  $C_w \frac{dT_2}{dt} + \rho_w q_h c_w T_2 = Q_0 q_h + \rho_w q_h c_w T_1$



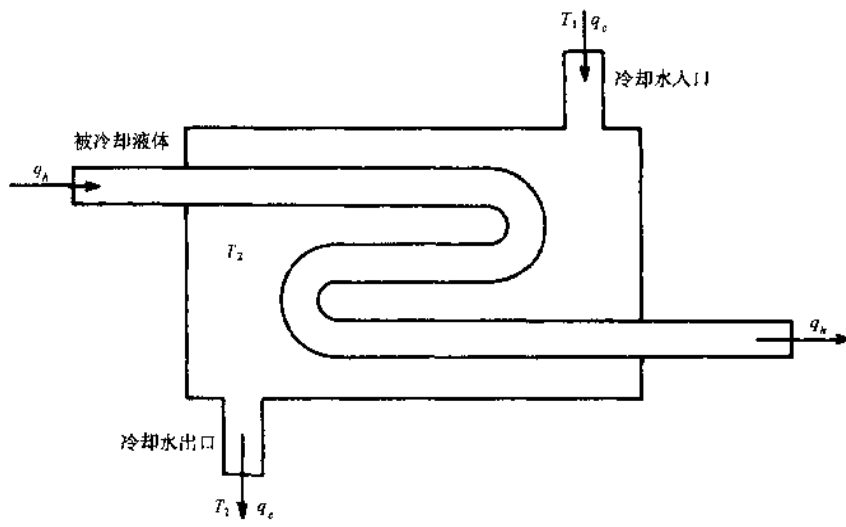


图 15-19

## 第 16 章 方框图和信号流图

### 16.1 方框图公式化

如在第 15 章中所导出的, 功能方框图以黑盒方式表示了一个联立方程组, 将线性控制系统的输出变量与参考输入、干扰输入联系起来。就像功能方框图那样构成数学方框图(或简称方框图), 有两点例外:

1. 每个代表元件或子系统的方框不用描述的名称标注, 而用联系其输入与其输出的传递函数标注。
2. 每个比较器被换为求和连接或求和器, 如图 16-1 的例。发出信号是进入信号的代数和, 每个进入信号表示直接相加(箭头旁 +)或相反(箭头旁 -)。

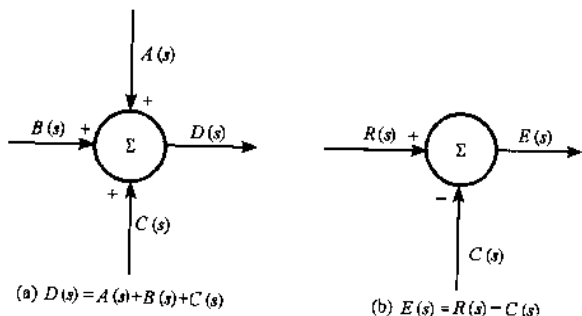


图 16-1

**例 16.1** 将图 15-10(b)的功能方框图变换成数学方框图。发动机工作于恒定转速。假定为磁线性。

**解** 可以用求和器替换比较器, 注意由图 15-10(a)用 KVL,  $v_e = v_r - v_b$ 。由元件方框的平衡求出传递函数。

**励磁机磁场** 将 KVL 应用于励磁电路求出

$$v_e = R_e i_e = L_e \frac{di_e}{dt} \quad (1)$$

由于假定了磁线性,

$$\varphi_e = K_{\varphi} i_e \quad (2)$$

可以解(1)的拉普拉斯变换求出  $I_e(s)$  并将结果代入(2)的拉普拉斯变换, 得出传递函数

$$\frac{\Phi_e(s)}{V_e(s)} = \frac{K_{\varphi}}{sL_e + R_e} \quad (3)$$

**励磁机电枢** 忽略恒定转速励磁机的电枢电感和电阻,

$$v_f = K_e \varphi_e \quad \text{或} \quad \frac{V_f(s)}{\Phi_e(s)} = K_e \quad (4)$$

**发电机电场** 像励磁机电场一样进行

$$\frac{\Phi_G(s)}{V_f(s)} = \frac{K_{\varphi}}{sL_f + R_f} \quad (5)$$

**发电机电枢** 只要发电机工作于开路, 则  $E_G = v_T$ , 而  $\varphi_G$  与  $v_T$  之间的传递函数直接为常数:

$$\frac{V_T(s)}{\Phi_G(s)} = K_G \quad (6)$$

**分压器** 如果励磁机励磁电阻和参考指令电位器电阻的串联组合远大于  $R_2$ , 则电压分配是有效的, 而联系  $V_T$  与  $V_b$  的传递函数为

$$\frac{V_b(s)}{V_T(s)} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (7)$$

上述传递函数和求和器信号已经用于构成图 16-2 的(数学)方框图。

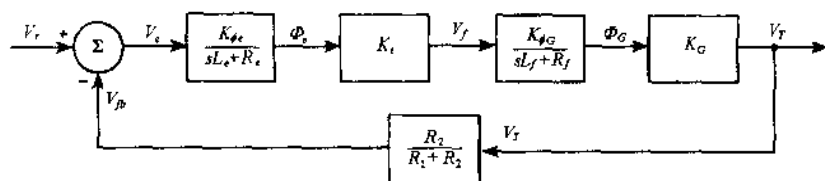


图 16-2

## 16.2 方框图代数

对于任何复合的控制系统, 方框图将包含许多串联接法和并联接法的传递函数。应用表 16-1 中所总结的方框图代数法可将方框图简化得更易于处理, 这是很适宜的。

表 16-1

法则	原初系统	简化系统
1. 级联方框		
2. 并联路径		
3. 移动采取点		
4. 移动求和器		
5. 消除反馈回路		

法则 5 的原初系统呈现为标准形式, 任何具有反馈的控制系统都可以变换成这种形式。

**例 16.2** 简化图 16-3(a) 方框图成单一方框。

**解** 利用法则 3 将反馈信号  $W(s)$  的采取点由方框  $C(s)$  的左侧移动至右侧。图 16-3(b) 示出了这个结果。

用法则 1 组合正向的级联(串接)方框和反馈路径, 得出图 16-3(c) 所示的简化方框图。

最后, 用法则 5 消除简单的负反馈回路得到图 16-3(d) 所示的方框图。

**例 16.3** 对于图 16-4(a) 的方框图, 试求出起因于参考指令  $R(s)$  和干扰  $Q(s)$  共同作用于系统时的输出  $C(s)$ 。

**解** 像例 15.7 和例 15.8 那样利用叠加定理。当  $Q=0$  时, 中间求和器是无影响的并可以

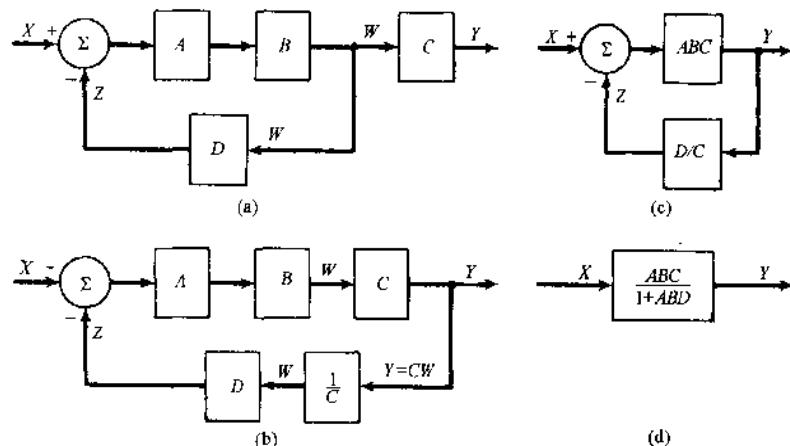


图 16-3

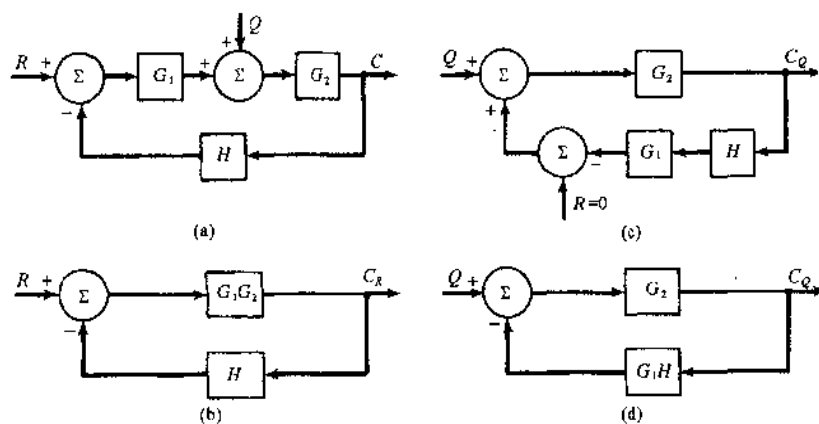


图 16-4

取消。可以组合级联方框  $G_1$  与  $G_2$ ，将这个系统简化为图 16-4(b) 的标准形式。然后用法则 5，归因于  $R$  单独作用下被控变量的分量是

$$C_R = \frac{G_1 G_2 R}{1 + G_1 G_2 H}$$

如果  $R=0$ ，可以重画方框图如图 16-4(c) 中所示。 $G_1$  左边求和器仅有的功能是将离开  $G_1$  的信号改变符号用以提供负反馈；可以取消这个求和器，并以符号的改变作为进入“输入”求和器的信号，如图 16-4(d) 中的举例。组合级联方框  $G_1$  与  $H$ ，并用法则 5，求出归因于  $Q$  单独作用下响应的分量为

$$C_Q = \frac{G_2 Q}{1 + G_1 G_2 H}$$

完全响应  $C$  是  $C_R$  与  $C_Q$  的和：

$$C = C_R + C_Q = \frac{G_2 (G_1 R + Q)}{1 + G_1 G_2 H}$$

**例 16.4** 对于图 16-5(a) 中表示的控制系统，试求出 (a) 被控变量  $C_1$  的响应，(b) 间接被控变量  $C_2$  的响应。

**解** 再一次用叠加定理，可以把每个输出看作是惟一的输出。

(a) 当忽视  $C_2$  的存在时，用法则 1 组合级联的方框  $G_1$  与  $G_2$ ，并用法则 5 求出响应  $C_1$  为

$$C_1 = \frac{G_1 G_2 R}{1 + G_1 G_2 H}$$

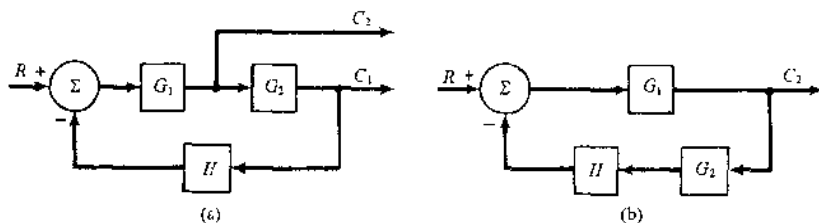


图 16-5

(b) 忽视  $C_1$ , 可以像图 16-5(b) 中那样重画方框图, 图中将  $C_2$  看作被控变量。组合反馈路径中的级联方框  $H$  与  $G_2$ , 并应用法则 5 求出

$$C_2 = \frac{G_1 R}{1 + G_1 G_2 H}$$

[另一方法, 可以由  $G_2 \equiv C_1/C_2$  和 (a) 的结果求出  $C_2$ 。]

### 16.3 信号流图

在控制系统的信号流图中, 将系统变量表示为节点, 用连接两个节点的有向支路表示对应变量之间的关系, 用相应的传递函数标注每条支路。见图 16-6(a)。当用负号冠至相应的传递函数前面时, 统计为负的求和, 见图 16-6(b)。

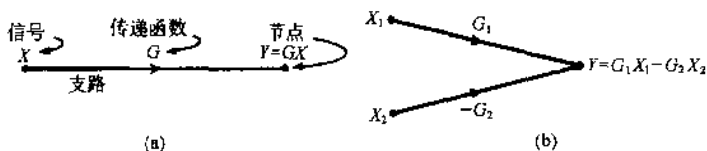


图 16-6

凭经验, 可以直接由系统方程画出信号流图, 但是参考方框图来绘制是可靠的而且是有系统的。

**例 16.5** 在图 16-7(a) 中给出了方框图, 试绘制系统的信号流图。

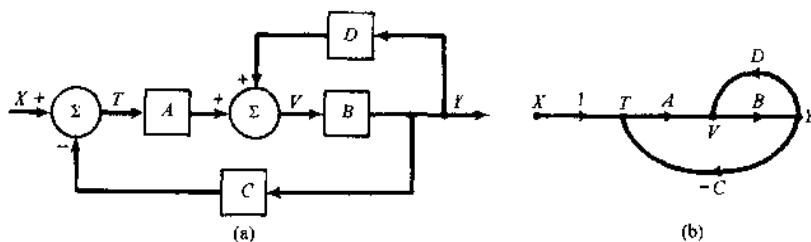


图 16-7

**解** 见图 16-7(b)。对于输入信号和输出信号以及除去那些进入求和器的全部其他信号, 都画成节点(用圆点表示)。在使信号互相联系起来的有向线段(支路)旁边, 表示出相应的传递函数。

信号流图优于方框图之处是不需要变换图就可以很容易求得系统传递函数。在叙述梅逊增益公式之前, 必须引入一些术语。将一条由信号流图的节点  $P$  引向节点  $Q$  的单纯面连续不断的有向路径称为由  $P$  至  $Q$  的正向路径。如果  $P$  与  $Q$  重合, 就将这个正向路径称为回路。正向路径(回路)的增益是包括正向路径(回路)中全部支路上的传递函数之积。如果信号流图的一组回路(或任意子图)中没有两个回路之间的公共节点, 这组回路就是不接触的。

$$\text{梅逊增益公式} \quad F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k$$

式中

$M_k$  为由输入节点  $R(s)$  至输出节点  $C(s)$  的第  $k$  条正向路径 ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 的增益。

$\Delta \equiv 1 - (\text{全部回路增益之和}) + (\text{两个不接触回路的回路增益之积, 其全部组合之和}) + \dots$   
 (三个不接触回路的回路增益之积, 其全部组合之和) +  $\dots$

$\Delta_k$  为去掉接触到由  $R$  至  $C$  的第  $k$  条正向路径的全部回路之后的  $\Delta$  值

函数  $\Delta(s)$  称做信号流图的行列式。

**例 16.6** 试利用梅逊增益公式求出图 16-7(b) 信号流图的传递函数  $Y(s)/X(s)$ 。

**解** 由  $X$  至  $Y$  仅有一条正向路径, 具有增益

$$M_1 = 1 \times A \times B = AB$$

在图中只有两个回路, 而且它们是接触的。于是,

$$\Delta = 1 - [A \times B \times (-C) + B \times D] = 1 + ABC - BD$$

此外, 两个回路都接触单一的正向路径, 使得  $\Delta_1 = 1$ 。然后由梅逊增益公式,

$$F(s) = \frac{M_1}{\Delta} = \frac{AB}{1 + B(AC - D)}$$

### 例题解答

**16.1** 试证明表 16-1 的法则 1。

$$C = G_2 A = G_2 (G_1 R) = (G_1 G_2) R$$

**16.2** 试证明表 16-1 的法则 5。

$$C = GE = G(R \pm HC)$$

求解  $C$ , 得到

$$C = \left( \frac{G}{1 \mp GH} \right) R$$

**16.3** 图 16-7(a) 方框图表示一个控制系统。(a) 将方框图简化成具有正反馈的单一回路。(b) 这个系统已经表现为不稳定的吗?

(a) 可以用表 16-1 的法则 4 将通过  $C$  的负反馈路径和通过  $D$  的正反馈路径移动, 得到图 16-8(a) 的等效方框图。其次可以用法则 5 简化图 16-8(a) 中包括  $B$  和  $AC$  的负反馈回路, 得到图 16-8(b) 的单一正反馈回路。如有要求, 可以用法则 1 组合级联的方框  $A$  与  $B/(1+ABC)$ 。

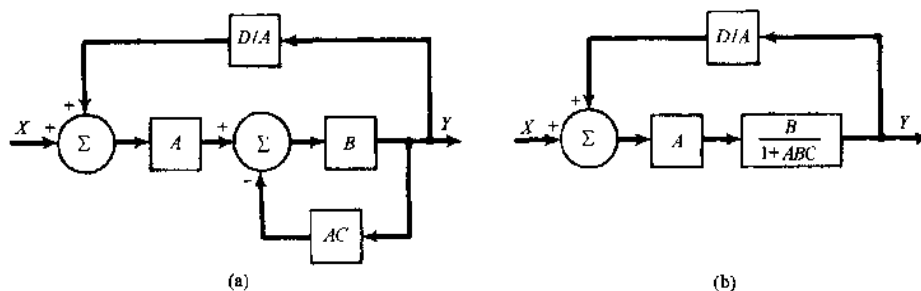


图 16-8

(b) 利用方框图代数进行的变换将维持系统传递函数不变: 如果系统在变换之前是稳定的, 以后它仍将是稳定的。

**16.4** 一个系统由微分方程  $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 3x(t)$  描述。如果初始条件是 (a)  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ , (b) 任意的  $y(0)$  和  $\dot{y}(0)$ , 试画出系统的方框图。

微分方程的拉普拉斯变换是

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) = 3X(s) \quad (1)$$

(a) 对于零初始条件, 可以解(1)得出

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} X(s)$$

图 16-9(a)是对应的方框图。

(b)对于非零初始条件, (1)得出

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} X(s) + \frac{s+5}{s^2 + 5s + 6} y(0) + \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \dot{y}(0)$$

将两个输入加至图 16-9(a)的方框图, 绘制出相应的方框图 16-9(b)。

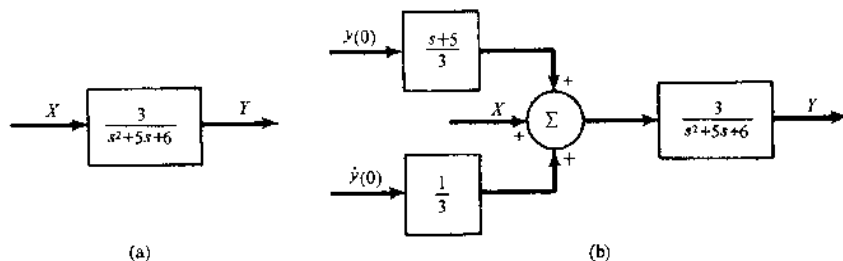


图 16-9

**16.5** 如果在方框图中仅有积分方框( $1/s$ )和常数增益, 重做题 16.4。(这样的模拟称做模拟计算机实现。)

求解题 16.4(1)中  $s$  最高阶的项, 使它的系数成为 1:

$$s^2 Y(s) = -5sY(s) - 6Y(s) + 3X(s) + (s+5)y(0) + \dot{y}(0)$$

$$(a) \quad s^2 Y(s) = -5sY(s) - 6Y(s) + 3X(s) \quad (1)$$

看到可以用  $s^2 Y(s)$  的一次积分生成  $sY(s)$ ; 由  $sY(s)$  的一次积分得到  $Y(s)$ 。于是提出两个级联积分方框使由  $s^2 Y(s)$  变至  $Y(s)$  形式,  $s^2 Y(s)$  由包含两个负反馈项的求和构成。见图 16-10(a)。

(b) 为了不必用微分器来处理(1)中  $y(0)$  的系数, 将(1)的每项除以  $s$  得到

$$sY(s) = -5Y(s) - \frac{6}{s}Y(s) + \frac{3}{s}X(s) + \left(1 + \frac{5}{s}\right)y(0) + \frac{1}{s}\dot{y}(0) \quad (2)$$

利用由(2)提出的求和构成  $sY(s)$ , 它的一次积分得出  $Y(s)$ ; 图 16-10(b)是相应的方框图。

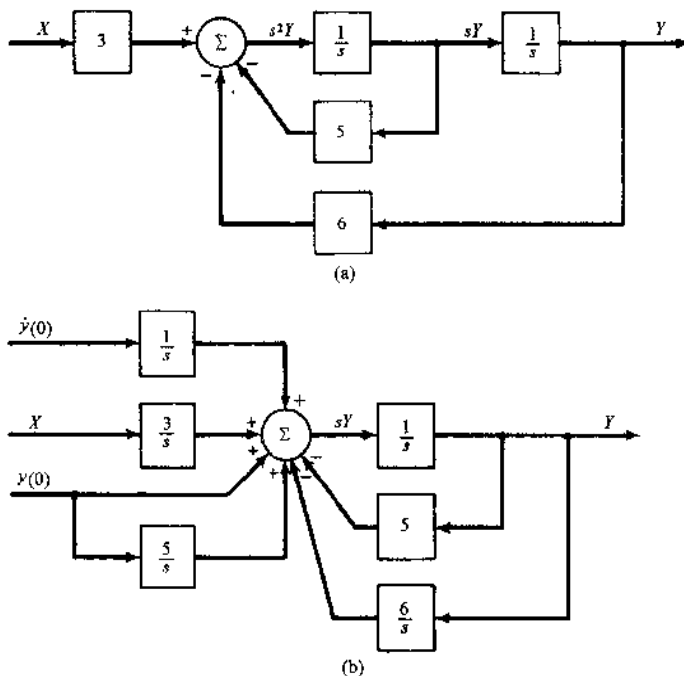


图 16-10

**16.6** 具有两个输入( $r_1, r_2$ )和两个输出( $x_1, x_2$ )的系统由一对微分方程

$$\dot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 4x_1 = r_1(t)$$

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_1 + 7x_2 = r_2(t)$$

描述。如果全部初始条件都是零, 试画出系统的方框图。

注意  $x_2$  依赖于  $x_1$ , 但反过来不是。取拉普拉斯变换并求解,

$$X_1 = \frac{1}{s^2 + 3s + 4} R_1 \quad X_2 = \frac{1}{s + 7} (R_2 + sX_1) \quad (1)$$

由此得图 16-11 的方框图。

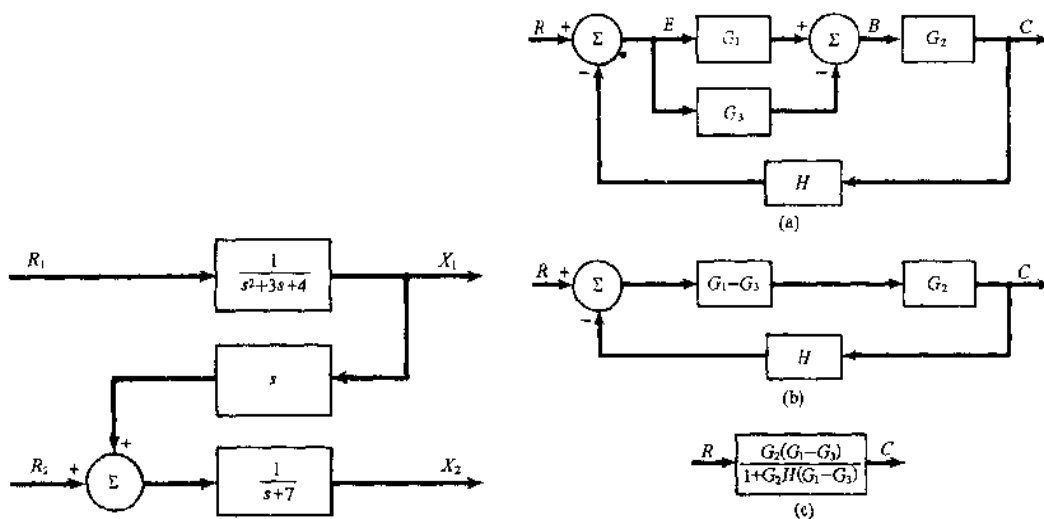


图 16-11

图 16-12

16.7 将图 16-12(a)的方框图简化成为单一的方框。

给出两个由  $R$  至  $C$  正向路径的并联支路可以用表 16-1 的法则 2 进行简化, 结果是图 16-12(b)。用法则 1 将级联的方框  $G_1 - G_3$  与  $G_2$  组合起来, 将所得的方框图用法则 5 进行简化, 得出图 16-12(c)的最终单一方框。

16.8 将图 16-13(a)的方框图简化成为单一的方框。

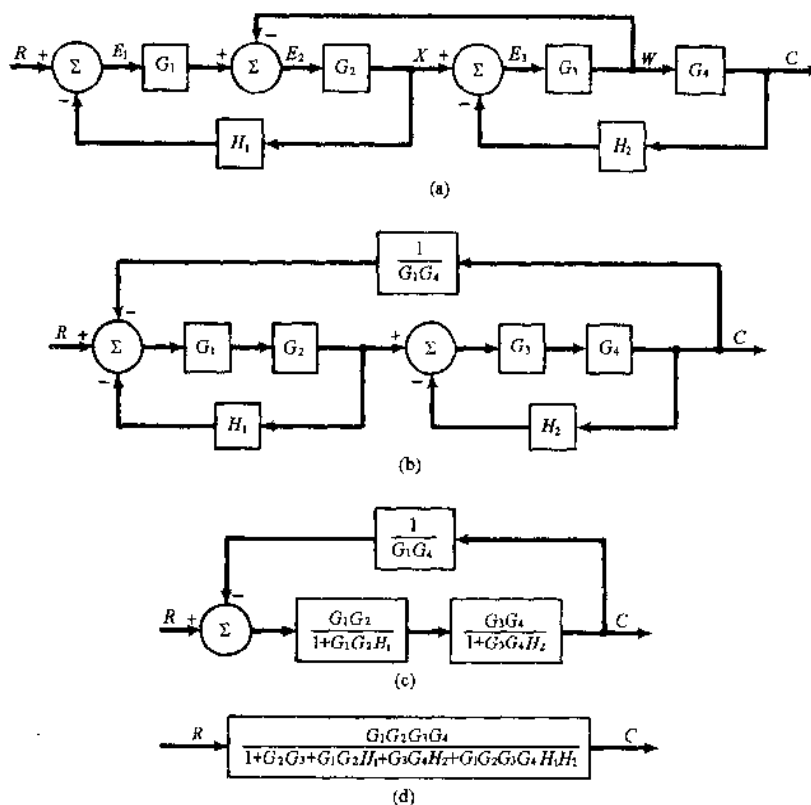


图 16-13

用表 16-1 的法则 3 和法则 4 可以移动单位反馈回路的采取点和求和器, 得出图 16-13(b)



的方框图。用法则5可以消除通过 $H_1$ 和通过 $H_2$ 的反馈回路,得到图16-13(c)的方框图。最后,用法则1组合图16-13(c)的级联方框,并将所得的标准反馈系统用法则5进行简化,给出图16-13(d)的单一方框。

- 16.9 图16-14(a)的系统具有一个以 $Q(s)$ 模拟的干扰输入。试求出传递函数(a)当 $Q(s)=0$ 时的 $C(s)/R(s)$ 和(b)当 $R(s)=0$ 时的 $C(s)/Q(s)$

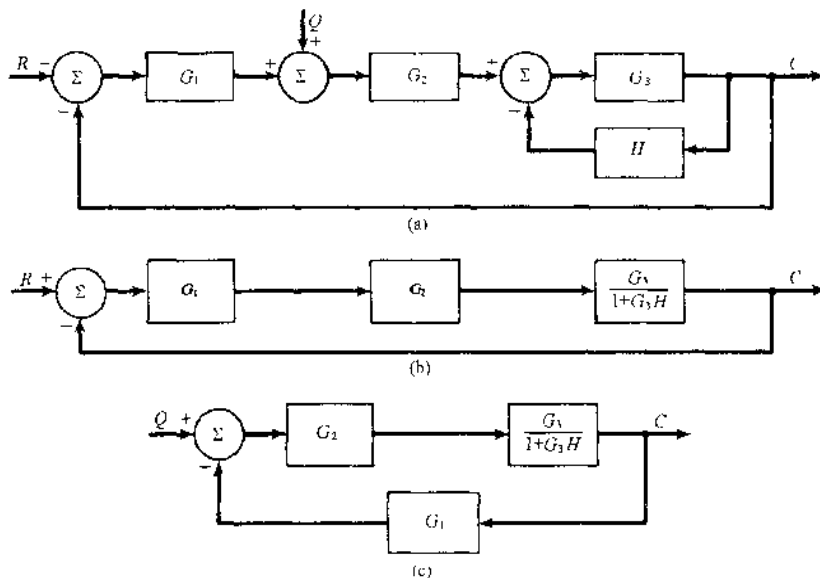


图 16-14

(a)用表16-1的法则5可以将内反馈回路简化成为单一的方框。当 $Q(s)=0$ 时,就可以像图16-14(b)那样重画方框图。如果用法则1组合正向路径的级联方框,然后就可以利用法则5给出传递函数:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3}$$

(b)当 $R(s)=0$ 时,像图16-14(c)中那样改换方框图。应用法则1和法则5导出传递函数

$$\frac{C}{Q} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_3 H + G_1 G_2 G_3}$$

- 16.10 对于图15-4的RC滤波器电路,设想端点 $ab$ 开路,将电流 $i(t)$ 设想为中间变量,试直接画出信号流图。输入为 $v_i$ 而输出为 $v_o$ 。

输入电压 $V_i(s)$ 必须靠输入导纳

$$Y_i(s) = \frac{1}{R + (1/sC)} = \frac{sC}{sRC + 1}$$

给出操纵变量 $I(s)$ 。 $I(s)$ 又要靠阻抗 $Z_L(s) = 1/sC$ 产生 $V_o(s)$ 。

在图16-15中描绘了由这两个过程提供的信号流图。

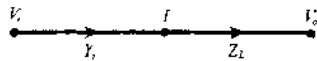


图 16-15

- 16.11 不利用方框图,试画出图15-5中直流伺服电动机的信号流图。电动机在恒定励磁电流下工作。电压 $v_i(t)$ 是输入而转速 $\omega_m(t)$ 是输出。

应用KVL并求解 $s$ 域的电枢电流得出

$$I_a(s) = \frac{1}{R_a} [V_i(s) - E(s)] \quad (1)$$

式中提供了与输入( $V_i$ )比起来为电动机反电动势( $E$ )的负反馈(固有反馈),于是以它们的差靠 $1/R_a$ 得到 $I_a$ 。

当为恒定的励磁电流时,电动机转矩与电枢电流成比例,由此

$$T_e(s) = K I_a(s) \quad (2)$$

电动机的旋转微分方程(见例15.11)有拉普拉斯变换

$$sJ\Omega_m(s) - \beta\Omega_m(s) = T_e(s) \quad (3)$$

最后,输出转速要靠反馈增益产生反电动势  $E$ :

$$E(s) = K\Omega_m(s) \quad (4)$$

式中  $K$  与(2)中的常数相同。

在图 16-16 中描绘了将(4)用至(1)后的信号流图。

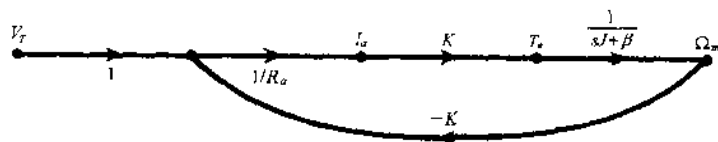


图 16-16

- 16.12 以图 16-12(a)表示的系统是为了用信号流图理论进行分析。(a)画出信号流图。(b)将梅逊增益公式用于(a)的信号流图,求出传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

(a)见图 16-17。

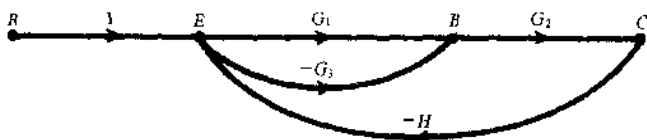


图 16-17

(b)有两条由  $R$  至  $C$  的正向路径,它们具有增益  $M_1 = G_1 G_2$  和  $M_2 = -G_2 G_3$ 。此图有两个回路,它们具有增益  $-G_1 G_2 H$  和  $G_2 G_3 H$ 。由于这些回路接触,

$$\Delta = 1 - (-G_1 G_2 H + G_2 G_3 H) = 1 + G_1 G_2 H - G_2 G_3 H$$

两个回路都接触两条正向路径;因此  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ 。应用梅逊增益公式得到

$$\frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} + \frac{M_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_2 (G_1 - G_3)}{1 + G_2 H (G_1 - G_3)}$$

- 16.13 用信号流图理论分析以图 16-13(a)表示的系统。(a)由已知的方框图画出信号流图。(b)用梅逊增益公式求出  $C(s)/R(s)$ 。

(a)在图 16-18 中画出了信号流图。

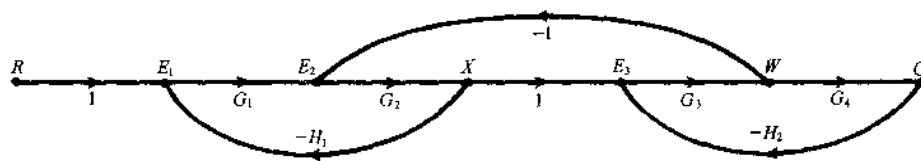


图 16-18

(b)有一条由  $R$  至  $C$  其增益  $M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$  的正向路径。三个回路各具有增益  $-G_1 G_2 H_1$ 、 $-G_3 G_4 H_2$ 、 $-G_2 G_3$ , 这些回路的前两个组成不接触的组合。所以信号流图行列式是

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (-G_1 G_2 H_1 - G_3 G_4 H_2 - G_2 G_3) + [(-G_1 G_2 H_1)(-G_3 G_4 H_2)] \\ &= 1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_2 \end{aligned}$$

由于全部回路都接触正向路径,而  $\Delta_1 = 1$ ,梅逊增益公式给出

$$\frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_2}$$

- 16.14 一个系统由微分方程  $a_3 \dddot{x} + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = r(t)$  描述。试将微分方程分解成一阶微分方程组,并由这个方程组直接画出信号流图。

令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = \ddot{x}$ ; 于是

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 - \frac{a_2}{a_3}x_3 - \frac{a_1}{a_3}x_2 = \frac{a_0}{a_3}x_1 + \frac{1}{a_3}r(t) \quad (3)$$

查看(1), 显示出由  $x_2$  的积分构成  $x_1$ ; 同样, (2) 表示由  $x_3$  的积分给出  $x_2$ 。方程(3)启示出  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $r(t)$  的线性组合。图 16-19 的信号流图涵括了(1)、(2)、(3)。

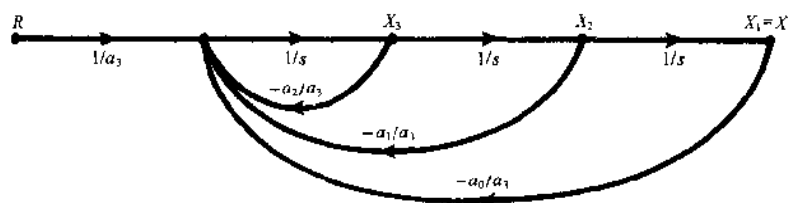


图 16-19

## 补充习题

16.15 试证明表 16-1 的法则 2、法则 3、法则 4。

16.16 试画出图 16-10(a) 中所示系统的信号流图, 并利用它验证题 16.4(a) 中所求出的传递函数。

答 见图 16-20。

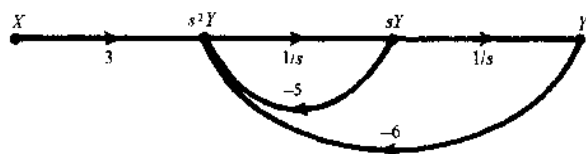


图 16-20

16.17 试求出以图 16-21 方框图所表示系统的微分方程。

答  $\dot{c}(t) + (a + K_1K_2)c(t) = K_1K_2r(t) + K_2q(t)$

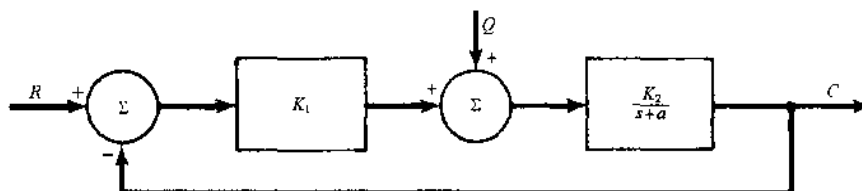


图 16-21

16.18 利用方框图代数求出由图 16-22 所表示系统的传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

答  $G_1(G_2 + G_3)/(1 + G_1H)$

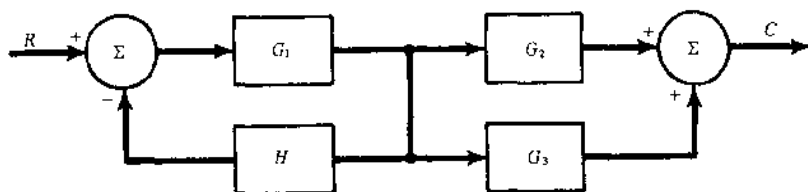


图 16-22

16.19 对于具有图 16-23 方框图的系统, 试求其传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

答  $G_1(1 + G_2)/(1 + G_1)$

16.20 试求图 16-24 方框图的传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

答  $G_1G_2(A + BD)$

16.21 试由例 15.13 的(3)和(4)画出图 15-7 旋转系统的信号流图。

答 见图 16-25。

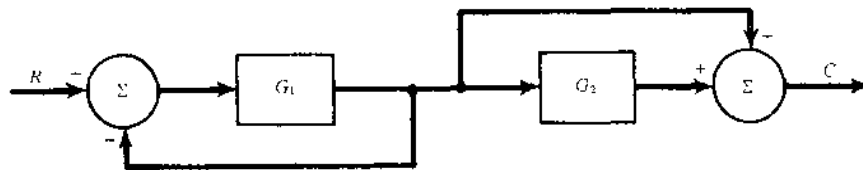


图 16-23

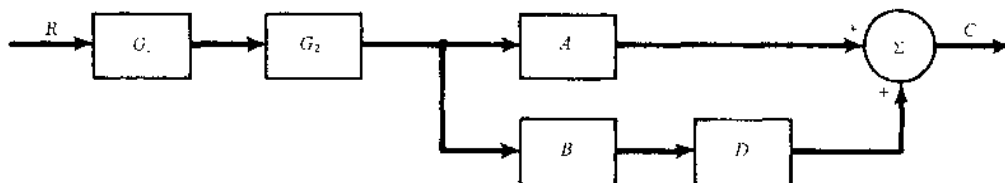


图 16-24

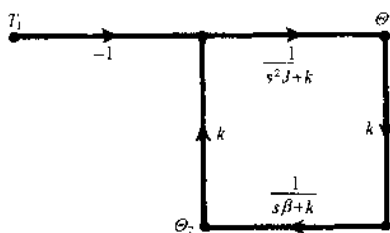


图 16-25

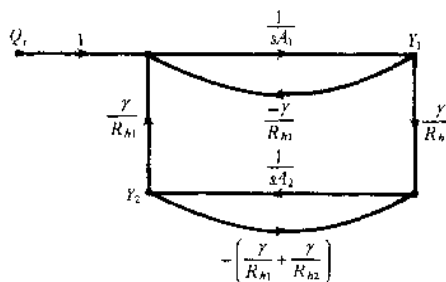


图 16-26

16.22 用题 15.10 的(3)和(5)描述图 15-16 的两个级联液体箱。试利用这些微分方程画出系统的信号流图。

答 见图 16-26。

16.23 试用梅逊增益公式求出图 16-27 信号流图的传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

答  $G_1(G_2 + G_3)/(1 + G_1H_1 + G_1G_2H_2 + G_1G_3H_2)$

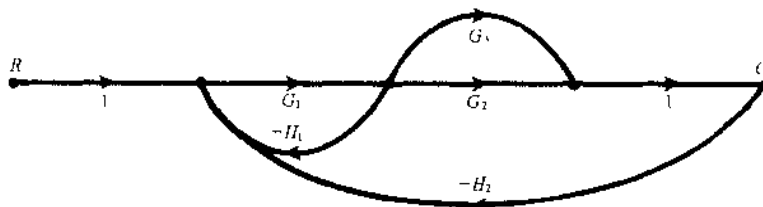


图 16-27

16.24 在图 8-7(a)中由 C 至 E 连接负载电阻  $R_L$ 。(a)试画出联系输入  $v_{be}$  与输出  $v_{ce}$  的信号流图, (b)利用它求出电压增益  $V_{ce}(s)/V_{be}(s)$ 。

答 (a)见图 16-28; (b)  $-h_{fe}R_L/(h_{ie} + h_{ie}h_{fe}R_L - h_{fe}h_{re}R_L)$

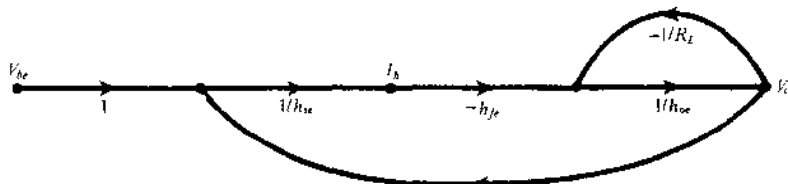


图 16-28

16.25 对于图 17-17(第 17 章)的系统, (a)画出信号流图, (b)利用它求出响应  $C(s)$ 。

答 (a)见图 16-29;

(b)  $C(s) = [G_c G_p R + G_p (1 - G_d G_c) Q]/(1 + G_c G_p H)$

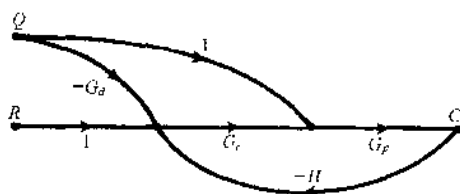


图 16-29

## 17.1 稳定性和特征方程

当且仅当线性系统的一切有界输入都导致有界输出时,这个系统就是稳定的。虽然这个判据在概念上是简单的,但是意味着不能对它实行检验,必需更为实用的判据。

论述将局限于可用实常数线性微分方程描述的系统,且为单一输出变量(被控变量) $c(t)$ 和单一输入变量(参考指令) $r(t)$ :

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} c(t)}{dt^{n-k}} = \sum_{k=0}^m b_{m-k} \frac{d^{m-k} r(t)}{dt^{m-k}} \quad (17.1)$$

式中  $a_n > 0$ 。在许多情况下,式(17.1)的右端将简化为  $r(t)$ ,且  $r(t)$  将经常是图 17-1 中所表示的函数之一。在第 5 章中研究过这些函数。

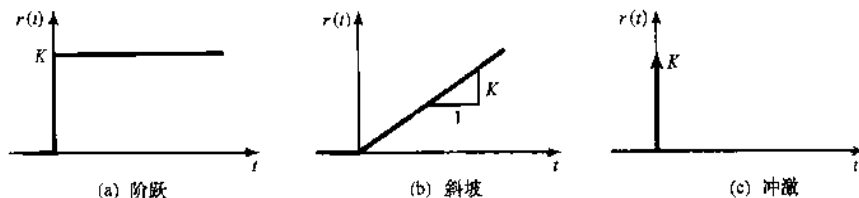


图 17-1

在零初始条件下,式(17.1)的拉普拉斯变换给出系统的传递函数为

$$F(s) \equiv \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (17.2)$$

式中的

$$N(s) \equiv \sum_{k=0}^m b_{m-k} s^{m-k} \text{ 和 } D(s) \equiv \sum_{k=0}^n a_{n-k} s^{n-k}$$

是  $s$  的多项式;而  $F(s)$  是  $s$  的有理函数。 $D(s)$  称为系统的特征多项式,可以将它改写为因式分解形式如

$$D(s) \equiv a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i) \quad (17.3)$$

式中  $s_i$  是特征方程  $D(s) = 0$  的(不一定相异的)根。如下面例题将表明的,从本质上确定系统稳定或不稳定的就是特征根。

**例 17.1** 当  $t \geq 0$  时,一个系统由

$$\ddot{c}(t) + 4\dot{c}(t) + 3c(t) = r(t) \quad (1)$$

表征。如果初始条件为零,试证明这个系统是稳定的。

**解** 这里  $D(s) = (s+1)(s+3)$ , 而式(17.2)给出

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+3}$$

由此

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t}$$

卷积定理(表 5-1 第 14 行)给出:

$$c(t) = \int_0^t r(\tau) f(t-\tau) d\tau = 0.5 \int_0^t r(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau - 0.5 \int_0^t r(\tau) e^{-3(t-\tau)} d\tau \quad (2)$$

如果输入  $r(t)$  是有界的——就是说当  $t > 0$  时  $|r(t)| < M$ ——于是由(2)有

$$\begin{aligned}
 |c(t)| &\leq 0.5 \int_0^t M e^{-(t-\tau)} d\tau + 0.5 \int_0^t M e^{-3(t-\tau)} d\tau \\
 &= 0.5M(1 - e^{-t}) + 0.5M \left( \frac{1 - e^{-3t}}{3} \right) \\
 &< 0.5M + 0.5M \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}M
 \end{aligned}$$

即  $c(t)$  也是有界的。

根本的证明在于特征根  $s = -1$  和  $-3$  是实且负的这一事实。这使  $f(t)$  成为衰减指数的和, 它再产生指数衰减的  $c(t)$ 。对于具有负实部的复数特征根, 理由不变。

**例 17.2** 试证明例 17.1 的系统无论在什么初始条件下都是稳定的。

**解** 经典地或利用拉普拉斯变换求解例 17.1 的(1), 得到

$$c(t) = c_f(t) + \frac{1}{2}[3c(0) + \dot{c}(0)]e^{-t} - \frac{1}{2}[c(0) + \dot{c}(0)]e^{-3t}$$

式中  $c_f(t)$  是由例 17.1 的(2)所给出的函数。于是, 如果  $r(t)$  是有界的而且  $c(0)$  和  $\dot{c}(0)$  是有限的, 则作为三个有界函数之和的  $c(t)$  本身也是有界的。

**例 17.3** 当  $t \geq 0$  时, 一个系统由

$$\ddot{c}(t) + 4\dot{c}(t) - 5c(t) = r(t)$$

表征。试证明这个系统是不稳定的。

**解** 同样可以假定  $c(0) = \dot{c}(0) = 0$ , 如果在零初始条件下不稳定就意味着在任何初始条件下都不稳定。现在特征根是  $s = +1$  和  $s = -5$ 。像例 17.1 中一样进行, 求出

$$c(t) = \frac{1}{6}e^t \int_0^t r(\tau)e^{-\tau} d\tau - \frac{1}{6}e^{-5t} \int_0^t r(\tau)e^{5\tau} d\tau$$

特别是当为有界输入  $r(t) \equiv 1$  时,

$$c(t) = \frac{1}{6}(e^t - 1) - \frac{1}{30}(1 - e^{-5t})$$

由于有  $e^t$  项而这是一个无界函数。

因为特征根之一是实且正的, 所以这个系统是不稳定的; 当有特征根是具有正实部的复数时, 也将如此。

例题刚才给出的再加上检查纯虚数或零特征根的情况, 提出如下的分类:

1. 如果全部特征根位于左半  $s$  平面内, 则系统是绝对稳定的(或只称稳定的)
2. 如果任一特征根位于右半  $s$  平面内或如果重特征根位于虚轴上(特殊在原点上), 则系统是不稳定的。
3. 如果没有特征根位于右半  $s$  平面内但非重特征根位于虚轴上(特殊在原点上), 则系统是临界稳定的或有限稳定的。

虽然临界稳定系统对于“许多”有界输入是有界响应, 但它们不是稳定的。因为这样的系统实际上是不重要的, 以后应当将一个系统考虑为或者是稳定的(情况 1)或者是不稳定的(情况 2 和情况 3)。

## 17.2 劳斯-赫尔维茨稳定性判据

劳斯-赫尔维茨方法由系统的未因式分解特征方程

$$D(s) \equiv a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (17.4)$$

确定它们的稳定性或不稳定性, 式中  $a_n > 0$ 。对于绝对稳定性必要但不充分的条件是式(17.4)中的全部系数为正。如果  $a_n$ , 直至  $a_0$  的任一系数为负或零, 则至少有一个特征根在右半  $s$  平面内或在虚轴上, 这个系统就是不稳定的。不论是否满足必要条件, 可以编制一个劳斯阵列如下:

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & 0 & \\
 \hline
 s^1 & i_1 & 0 & & & \\
 s^0 & j_1 & 0 & & & 
 \end{array}$$

阵列的第三行由行列式:

$$b_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

构成,直到  $b_m$  成为零并继续是零为止。同样,第四行按

$$c_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad \dots$$

构成,直到  $c_m$  成为零并继续是零为止。继续做这个图表直到编制出  $n+1$  行的阵列。

**稳定性定理** 在右半  $s$  平面内的特征根数(按相重数统计)等于劳斯阵列第一列中的符号改变次数。

**例 17.4** 如果一个系统有特征方程

$$D(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10 = 0$$

试求右半  $s$  平面根的数目。

**解** 编成的劳斯阵列为

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^5 & 1 & 3 & 16 & 0 \\
 s^4 & 1 & 9 & 10 & 0 \\
 s^3 & -1 & 1 & 0 & \quad b \text{ 行} \\
 s^2 & 1 & 1 & 0 & \quad c \text{ 行} \\
 s^1 & 2 & 0 & \quad d \text{ 行} \\
 s^0 & 1 & 0 & \quad e \text{ 行}
 \end{array}$$

其中,为了简化计算(不影响最后的结果),在编入阵列之前, $b$ 行项目都乘以  $1/6$ , $c$ 行项目都乘以  $1/10$ 。在阵列的第一列中,当第三行时符号变成负,第四行时符号返回成正。所以特征方程有两个单根或一组二重根在右半  $s$  平面内,而系统是不稳定的。

在编制劳斯阵列时会出现两个例外或特殊情况:(一)在某行的第一列出现零而随后至少有一个非零项目;(二)出现全是零项目的行(这包括最后两行的第一列出现零)。

**特殊情况一** 当出现第一列是零而随后有非零项目时,直接用  $\epsilon$  替换零。完成阵列,然后在正值的  $\epsilon \rightarrow 0$  时检验第一列的符号变化。

**特殊情况二** 当特征方程有其和为零的一对根时(两个根对于  $s$  平面的原点对称)就要出现零行;按如下步骤处理:

(1)用劳斯阵列最后非零行的系数构成  $s$  的辅助多项式,递减的  $s$  方次由标注这个非零行的  $s$  方次开始。

(2)将辅助多项式对  $s$  取导数,并以所得多项式的系数替换零行。

(3)完成阵列,并应用稳定性定理确定右半  $s$  平面根的数目。

现在可以将劳斯-赫尔维茨判据做如下陈述:当且仅当系统的劳斯阵列显示出第一列中没有符号改变并且在计算的过程中不出现零行时,则系统是稳定的。

### 17.3 一阶系统的响应

系统的阶按其特性多项式的次数来定义。如果传递函数具有  $N(s)/D(s)$  形式, $D(s)$  为  $n$

次的多项式,  $N(s)$  为零次的多项式, 则将这个系统称为简单  $n$  阶系统。

图 17-2(a) 以标准形式给出了典型的简单一阶系统, 可以将此系统简化为图 17-2(b) 的形式。传递函数为

$$F(s) \equiv \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \equiv \frac{1}{\tau s + 1} \quad (17.5)$$

看到当且仅当  $\tau > 0$  时这个系统是稳定的。

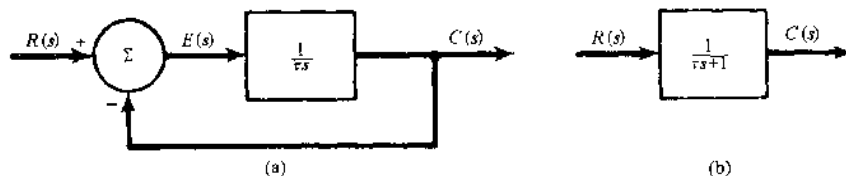


图 17-2

**例 17.5** 如果将图 17-1(a) 的阶跃指令施加至稳定的简单一阶系统, (a) 求  $t \geq 0$  时的响应, 识别瞬态分量和稳态分量; (b) 求稳定时间。

**解** (a) 由式 (17.5)

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} R(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{K}{s}$$

反变换至时域,

$$c(t) = K - Ke^{-t/\tau} \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

(1) 的第一项是稳态响应, 第二项是瞬态响应。  $\tau$  (时间常数) 的值越小, 沿着图 17-3 指数曲线的系统响应就越快。在稳态下,  $c(t)$  的值趋近  $r(t)$  的值, 即系统轨迹没有误差。

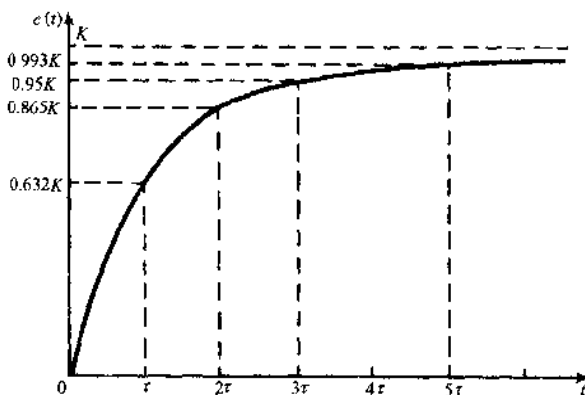


图 17-3

(b) 在图 17-3 中举例表示了稳定时间 (响应保持在最终值的 5% 以内), 图中  $t_s \approx 3\tau$ 。

**例 17.6** 将图 17-1(b) 的斜坡指令施加至稳定的简单一阶系统。 (a) 求系统响应的表达式。 (b) 识别并讨论系统误差。

**解** (a) 
$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} R(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{K}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{K\tau}{s} + \frac{K\tau}{s + (1/\tau)}$$

将拉普拉斯变换式再反变换得

$$c(t) = K(t - \tau) + K\tau e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

注意, 虽然系统是稳定的而  $c(t)$  却是无界的, 理由是  $r(t)$  是无界的。

(b) 图 17-4 画出了  $r(t)$  和所得响应  $c(t)$  的略图。误差

$$e(t) \equiv r(t) - c(t)$$

是两条曲线的垂直间距。直到  $t \approx 5\tau$  时误差在增大, 这时它基本上达到恒定值  $K\tau$ 。在稳态条件下, 由  $r(t)$  达到某个特定值的时刻至  $c(t)$  达到这个值的时刻具有  $\tau(s)$  的时间间隔, 称为稳



态滞后。

注意在上面的应用中“稳态”这个词的普遍意义是重要的。强制解  $K(t - \tau)$  和随着的  $c(t)$  当  $t \rightarrow \infty$  时变成无限大;严格地说,在这种情况下不存在稳态。在本章的以下部分中,应当继续利用根据响应的非衰减分量所定义的“稳态”,而不论这个分量当  $t \rightarrow \infty$  时是否存在有限的极限值。

#### 17.4 二阶系统的响应

物理可实现的简单二阶系统的传递函数可以按参数形式写为

$$F(s) \equiv \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \equiv \frac{\omega_n^2}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17.6)$$

式中  $\zeta$  (无量纲的) 是阻尼比,  $\omega_n$  (rad/s) 是固有频率。两个参数都是实数, 且  $\omega_n$  是正的。将  $N(s)$  选取为  $\omega_n^2$  值仅仅是方便的归一化, 可以替换任何其他常数。

特征方程  $D(s) = 0$  的根是

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (17.7)$$

情况 1 若  $\zeta > 1$ , 则根是不等的负实数。

情况 2 若  $\zeta = 1$ , 则根是相等的负实数。

情况 3 若  $0 < \zeta < 1$ , 则根是有负实部的共轭复数。

情况 4 若  $\zeta = 0$ , 则根是纯虚数(共轭复数)。

情况 5 若  $\zeta < 0$ , 则根是有正实部的共轭复数。

情况 1、2、3 (即  $\zeta > 0$ ) 对应于稳定系统。对于情况 3 的进一步研究, 经常将式(17.7)改写为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \equiv -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \quad (17.8)$$

式中  $\omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  称做阻尼(固有)频率。

**例 17.7** 将单位阶跃指令施加至一个简单二阶系统。试求(a)当  $0 < \zeta < 1$  时, (b)当  $\zeta = 1$  时, (c)当  $\zeta > 1$  时的响应。

**解** (a) 解式(17.6)求施加单位阶跃输入 [ $K = 1$  时的图 17-1(a)] 下的  $C(s)$ , 此处  $R(s) = 1/s$ , 并利用部分分式表达式得

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (1)$$

反变换(见表 5-1 第 8 行和第 9 行),

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

式中  $\varphi = \arccos \zeta$ 。

(b) 若  $\zeta = 1$ , 则  $\omega_d = 0$ , 且(1)变为

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\omega_n}{(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \quad (3)$$

$$c(t) = 1 - (\omega_n t + 1) e^{-\omega_n t} \quad (t \geq 0) \quad (4)$$

(c) 若  $\zeta > 1$ , 可以将式(17.7)改写为

$$s_1 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \equiv -\lambda_1\omega_n \quad s_2 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \equiv -\lambda_2\omega_n$$

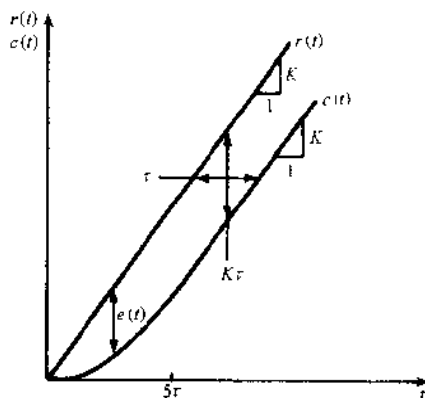


图 17.4

式中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是正实数。于是

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \lambda_1\omega_n)(s + \lambda_2\omega_n)} = \frac{1}{s} + \frac{\lambda_1/2 \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \lambda_1\omega_n} - \frac{\lambda_2/2 \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \lambda_2\omega_n} \quad (5)$$

并且拉普拉斯反变换给出

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}(\lambda_1 e^{-\lambda_1\omega_n t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2\omega_n t}) \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

图 17-5 是例 17.7 中当  $\zeta = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7$  时(2)的, (4)的以及当  $\zeta = 2$  时(6)的图象。自变量是无量纲时间  $\omega_n t$ 。当  $\zeta = 0$  时, 系统是无阻尼的而响应纯粹是振荡。当  $0 < \zeta < 1$  时, 系统是欠阻尼的而在逐渐趋向稳态值之前有过冲。当  $\zeta = 1$  时, 系统是临界阻尼的; 这是对稳态值不存在过冲下  $\zeta$  的最小值。当  $\zeta \geq 1$  时, 不存在过冲, 其响应类似于二阶系统的响应。

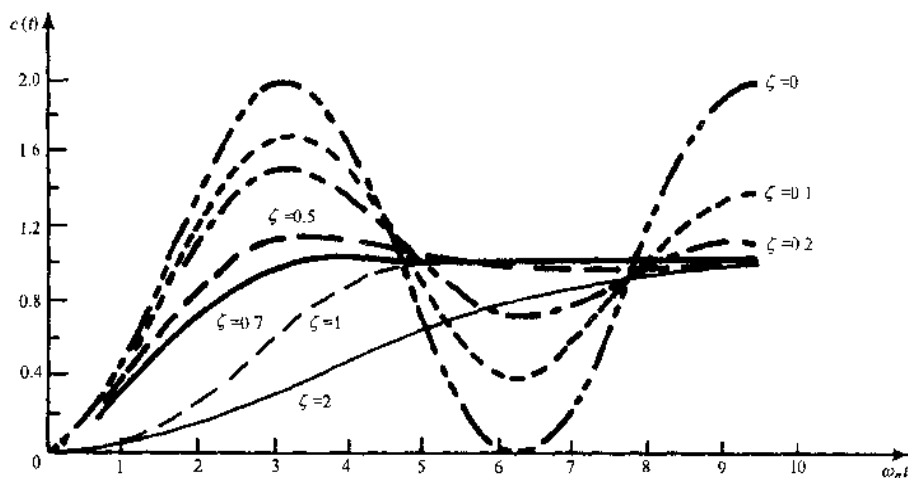


图 17-5

### 17.5 稳态误差

利用加上并减去一个单位反馈路径, 可以将图 17-6(a) 的标准形式方框图变换成图 17-6(b) 的等效方框图。于是内圈回路的简化给出

$$G_u(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s) - G(s)} \quad (17.9)$$

并且以图 17-6(c) 的单位反馈形式模拟了这个系统。通常  $G_u(s)$  是形式为

$$G_u(s) = \frac{K_u P(s)}{s^n Q(s)} \quad (17.10)$$

的有理式, 式中  $P(s)$  和  $Q(s)$  是  $P(0) = Q(0) = 1$  的多项式;  $K_u$  称为单位反馈系统的正向增益; 非负的整数  $n$  是系统的型数, 实际是在反馈回路中存在  $n$  次积分。

习惯上按照控制系统跟随位置、速度、加速度单位阶跃指令的能力对某进行分类; 在每种情况下, 稳态误差是对系统优度的计量。将位置作为被控变量  $c(t)$ , 要研究的指令因而是

$$\text{按位置阶跃 } r(t) = u(t) \longleftrightarrow R(s) = 1/s \quad (17.11)$$

$$\text{按速度阶跃 } r(t) = tu(t) \longleftrightarrow R(s) = 1/s^2 \quad (17.12)$$

$$\text{按加速度阶跃 } r(t) = \frac{1}{2}t^2 u(t) \longleftrightarrow R(s) = 1/s^3 \quad (17.13)$$

在图 17-6(c) 中模型中, 动作误差信号(控制力)正好就是系统误差:

$$E_u(s) = R(s) - C(s) = \frac{R(s)}{1 + G_u(s)}$$

依据拉普拉斯变换的终值定理(表 5-1 第 15 行),

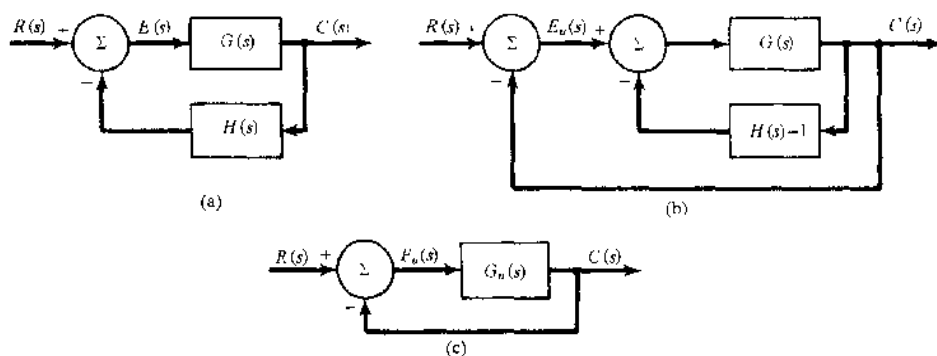


图 17-6

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a \text{ 意味着 } \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = a$$

因此,定义稳定系统的稳态误差( $e_{ss}$ )为

$$e_{ss} \equiv \lim_{s \rightarrow 0} sE_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{sR(s)}{1 + G_u(s)} \right] \quad (17.14)$$

虽然保证了稳定性,但是由于无界输入  $r(t)$ , 式(17.14)给出无限大的  $e_{ss}$  仍是可能的, 在下面表 17-1 中将发现一些例证。

表 17-1

系统型式	位置阶跃		速度阶跃		加速度阶跃	
	$K_p$	$e_{pos}$	$K_v$	$e_{vel}$	$K_a$	$e_{acc}$
0	$K_u$	$1/(1 + K_u)$	0	$\infty$	0	$\infty$
1	$\infty$	0	$K_u$	$1/K_u$	0	$\infty$
2	$\infty$	0	$\infty$	0	$K_u$	$1/K_u$

在式(17.14)中用不同指令式(17.11)、(17.12)、(17.13)可以导出以一组误差系数( $K_p$ 、 $K_v$ 、 $K_a$ )表示的稳态误差通式:

$$\text{稳态位置误差} \equiv e_{pos} \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s(1/s)}{1 + G_u(s)} \right] = \frac{1}{1 + K_p} \quad (17.15)$$

$$\text{静态位置误差系数} \equiv K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [G_u(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{K_u}{s^n} \right] \quad (17.16)$$

$$\text{稳态速度误差} \equiv e_{vel} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s(1/s^2)}{1 + G_u(s)} \right] = \frac{1}{K_v} \quad (17.17)$$

$$\text{静态速度误差系数} \equiv K_v = \lim_{s \rightarrow 0} [sG_u(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{K_u}{s^{n-1}} \right] \quad (17.18)$$

$$\text{稳态加速度误差} \equiv e_{acc} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s(1/s^3)}{1 + G_u(s)} \right] = \frac{1}{K_a} \quad (17.19)$$

$$\text{静态加速度误差系数} \equiv K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 G_u(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{K_u}{s^{n-2}} \right] \quad (17.20)$$

在表 17-1 中总结了 0 型、1 型、2 型系统的静态误差系数和相应的稳态误差。

#### 归因于干扰的误差

图 17-7(a)是在设备输入处有干扰情况的方框图; $C(s)$ 是若不存在  $Q(s)$  时的被控响应, 而  $C_d(s)$ 是归因于  $Q(s)$  单独作用时的响应。由于系统是线性的, 可以应用叠加定理, 允许分别当  $r(t) \equiv 0$  和  $q(t) \equiv 0$  时求  $c_d(t)$  和  $c(t)$ 。

**例 17.8** 试利用终值定理求出图 17-7(a)系统(假设稳定)稳态误差  $e_{ss}$  的通式。

**解** 图 17-7(b)是若  $Q(s) \equiv 0$  时原网络的化简。同样, 当  $R(s) \equiv 0$  时图 17-7(c)是简化

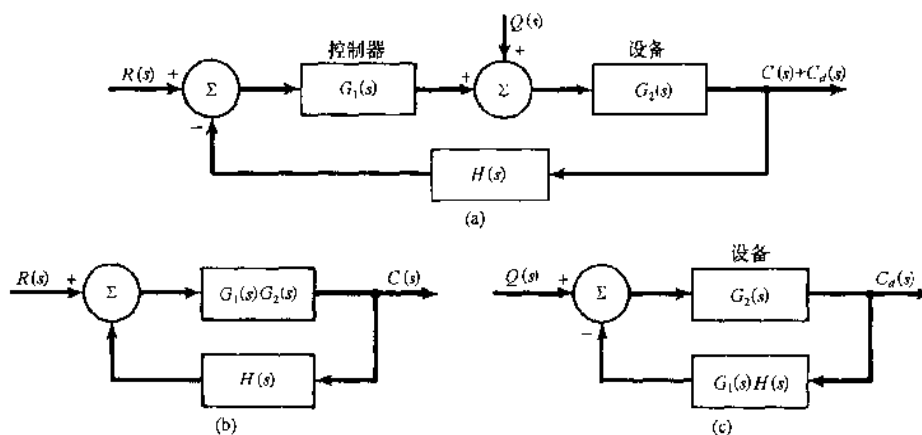


图 17-7

的系统模型。如果  $R(s) \equiv 0$ , 响应给自

$$C_d(s) = \frac{G_2(s)Q(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (1)$$

类似地, 当  $Q(s) \equiv 0$  时,

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (2)$$

任何归因于  $Q(s)$  而不希望有的响应  $C_d(s)$  是未受干扰时系统误差之外的附加误差, 因此误差的  $s$  域表达式为

$$E(s) = R(s) - C(s) + C_d(s) = \frac{R(s)\{1 + G_1(s)G_2(s)[H(s) - 1]\} + G_2(s)Q(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3)$$

终值定理给出  $t \rightarrow \infty$  时误差的值

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (4)$$

### 17.6 灵敏度分析

灵敏度是对于某些有关参数偏离标称值的改变影响到所关心变量工作的一种定量计量。以  $S_B^A$  表示  $A$  对于  $B$  改变时的灵敏度, 有

$$S_B^A = \frac{A \text{ 的归一化改变}}{B \text{ 的归一化改变}} = \frac{\Delta A/A}{\Delta B/B} \approx \frac{dA/A}{dB/B} = \frac{BdA}{AdB} \quad (17.21)$$

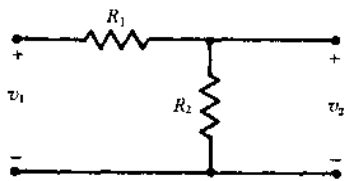


图 17-8

**例 17.9** 图 17-8 的分压器具有标称电阻  $R_1 = 2\Omega$  和  $R_2 = 3\Omega$ 。试求当起因于热效应  $R_1$  的  $+5\%$  改变下  $v_2$  的百分数改变。

**解** 由电压分配,

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1$$

灵敏度函数为

$$S_{R_1}^{v_2} = \frac{R_1}{v_2} \frac{dv_2}{dR_1} = \frac{R_1}{R_2 v_1 / (R_1 + R_2)} \frac{d}{dR_1} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = \frac{-R_1}{R_1 + R_2}$$

并由式(17.21),

$$\frac{\Delta v_2}{v_2} = S_{R_1}^{v_2} \frac{\Delta R_1}{R_1} = \left( \frac{-R_1}{R_1 + R_2} \right) (+5\%) = \left( \frac{-2}{2+3} \right) (5\%) = -2\%$$

这就是, 如果  $R_1$  增大  $5\%$ , 则  $v_2$  减小  $2\%$ 。

如果  $A(s)$  和  $B(s)$  是  $s$  域的量, 则  $S_B^A$  也将是  $s$  的函数。设定  $s=0$  求静态灵敏度; 它计量

的是当施加单位阶跃(直流激励)时  $\alpha(\infty)$  对于有关参数改变下的灵敏度。如果将  $s$  换以  $j\omega$ , 此  $\omega$  是在  $r(t)$  频谱中所关心的频率, 则这个灵敏度称做动态灵敏度。

### 例题解答

17.1 对于图 17-6(a) 标准形式的系统, 试计算在特征方程之根下的  $G(s)H(s)$ 。

由表 16-1 的法则 5, 系统传递函数为

$$F(s) \equiv \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} \quad (1)$$

式中  $G$  和  $H$  对  $s$  的函数关系是明了的。对于任何以式(17.1)形式微分方程描述的系统,  $G$  和  $H$  将是  $s$  的有理函数, 即  $G = N_G/D_G$  和  $H = N_H/D_H$ , 各  $N$  和  $D$  都是  $s$  的多项式。于是可以将(1)写为

$$F(s) = \frac{D_H N_G}{D_G D_H + N_G N_H} \equiv \frac{N}{D} \quad (2)$$

可以由  $D=0$  的根或由  $1+GH=0$  的根给出有理函数  $F(s)$  的根点; 所以这两组根必定是相同的。由此在  $D=0$  的任一根下

$$GH = -1$$

17.2 一个系统具有传递函数

$$F(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)}$$

施加  $R(s) = 1 + (4/s)$  的参考指令。(a) 如果初始条件为零, 试求当  $t > 0$  时的系统响应。

(b) 为什么这种参考指令的选择是一个模式抑制控制的例子?

(a) 拉普拉斯域的系统响应给自

$$C(s) = F(s)R(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)} \left( \frac{s+4}{s} \right) = \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \quad (1)$$

反变换,

$$c(t) = 1 - e^{-2t} \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

(b) 模式抑制控制对于不希望有的瞬态响应模式强制为零系数。对于眼前的情况, 约去(1)中的  $(s+4)$  就防止了(2)中  $e^{-4t}$  项的出现。

17.3 试对于如下的每一个特征方程写出预期的瞬态响应形式并讨论稳定性:

$$(a) D(s) = (s+1)(s+100)(s+4) = 0$$

$$(b) D(s) = s(s^2 + 2s + 5) = 0$$

$$(c) D(s) = s^2(s-2)(s+2) = 0$$

$$(d) D(s) = (s+3)(s^2 - 6s + 18) = 0$$

(a) 特征方程具有三个根全部在左半  $s$  平面内, 因此系统是绝对稳定的。

$$c_u(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-100t} + A_3 e^{-4t} \quad (t \geq 0)$$

(b) 分解  $D(s)$  中二次项的因式, 得到位于左半  $s$  平面内的根  $s_{1,2} = -1 \pm j2$ 。然而有一个根 ( $s_3 = 0$ ) 位于  $s$  平面的原点上, 给出不稳定性(临界稳定性)。

$$c_u(t) = A_1 u(t) + B_1 e^{-t} \cos(2t + \varphi) \quad (t \geq 0)$$

(c) 特征方程有一组二重根在原点上, 这使得系统不稳定。另外有一个根位于  $s = +2$ , 也造成了不稳定系统。

$$c_u(t) = A_1 u(t) + A_2 t + A_3 e^{+2t} + A_4 e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

(d) 二次项因式给出根  $s_{1,2} = 3 \pm j3$  位于右半  $s$  平面内, 系统是不稳定的;

$$c_u(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{+3t} \cos(3t + \varphi) \quad (t \geq 0)$$

17.4 图 17-6(a) 中标准形式的控制系统具有  $G(s) = K/(s+1)$  和  $H(s) = 0.05$ 。正向路径中的一个元件是  $K = -10$  的反相放大器。(a) 这个系统是稳定的吗? (b) 解释  $F(s)$  的符号。

$$(a) F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{-10/(s+1)}{1 + \left(\frac{10}{s+1}\right)(0.05)} = \frac{-10}{s+0.5} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$D(s) = 0$  的惟一根位于左半  $s$  平面内, 系统是稳定的; 当  $K < -20$  时系统将是不稳定的。

(b) 负号表示反向的意思或者表示指令  $r(t)$  与响应  $c(t)$  之间的定向。

### 17.5 一个稳定简单一阶系统的 $s$ 域响应给自

$$C(s) = \frac{4A}{s^2} - \frac{A}{s} + \frac{A}{s+4}$$

系统指令的时域形式是什么?

用求出的最低公分母, 可以将响应再写为

$$C(s) = F(s)R(s) = \frac{16A}{s^2(s+4)} \quad (1)$$

由于系统是稳定的、简单的、一阶的, 因此传递函数必定是

$$F(s) = \frac{K}{s + \tau^{-1}}$$

形式。察看(1), 表示  $R(s)$  必定是  $B/s^2$  的形式或时域的  $r(t)$  是斜坡函数:

$$r(t) = Bt \quad (t \geq 0)$$

### 17.6 将劳斯-赫尔维茨判据应用至下面的特征方程以确定系统的稳定性:

$$D(s) = 3s^5 + 12s^4 + 15s^3 + 21s + 33 = 0$$

由于  $D(s)$  中  $s^3$  的系数是零, 对于  $D(s)$  绝对稳定性的必要性检验失败了: 将至少存在一个具有非负实部的特征根。将全部系数乘以  $1/3$  之后编制劳斯阵列的前两行。另外在放入阵列中位置之前, 各个  $b$  项、 $c$  项、 $d$  项、 $e$  项都乘以正的常数。

$s^5$	1	0	7	
$s^4$	4	5	11	
$s^3$	-5	17		<b>b 行</b>
$s^2$	93	55		<b>c 行</b>
$s^1$	1			<b>d 行</b>
$s^0$	1			<b>e 行</b>

$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{1} = \frac{5}{4}$	$b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}{4} = \frac{17}{4}$
$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 17 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{93}{5}$	$c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{55}{5}$
$d_1 = \frac{- \begin{vmatrix} -5 & 17 \\ 93 & 55 \end{vmatrix}}{93} = \frac{1856}{93}$	$e_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 93 & 55 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 55$

两次符号改变出现在劳斯阵列的第一列中; 所以特征方程具有两个右半  $s$  平面根。(由因式分解, 五个根是  $-4.222$ 、 $-0.7235 \pm j0.8364$ 、 $+0.8346 \pm j1.197$ 。)

### 17.7 用劳斯-赫尔维茨方法检验下面特征方程的右半 $s$ 平面根:

$$D(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + 4s + 1 = 0$$

满足了稳定性的必要条件。建立劳斯阵列并计算行项目。

$s^5$	1	1	4	
$s^4$	1	1	1	
$s^3$	$\epsilon$	3		<b>b 行</b>
$s^2$	$\frac{\epsilon-3}{\epsilon}$	1		<b>c 行</b>
$s^1$	$3 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon-3}$			<b>d 行</b>
$s^0$	1			<b>e 行</b>

$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 3$
--	--

根据  $b$  行项目的计算,  $b_1 = 0$  但剩下的  $b$  行项目不全是零, 这属于特殊情况。设  $b_1 = \epsilon$  并继续阵列的


编制:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 3 \end{vmatrix}}{\epsilon} = \frac{\epsilon - 3}{\epsilon} \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 0 \end{vmatrix}}{\epsilon} = 1$$

$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \epsilon & 3 \\ \frac{\epsilon-3}{\epsilon} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{\epsilon-3}{\epsilon}} = 3 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon-3} \quad e_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \epsilon-3 & 1 \\ 3 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon-3} & 0 \end{vmatrix}}{3 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon-3}} = 1$$

完成阵列后令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 使得  $b_1 > 0, c_1 < 0, d_1 > 0$ 。看到出现两次符号改变;  $D(s) = 0$  有两个右半  $s$  平面根。

**17.8** 将劳斯-赫尔维茨方法应用至  $D(s) = s^5 + s^4 + 4s + 4$  以确定右半  $s$  平面根的数目。

 这个系统必定是不稳定的。最后的劳斯阵列是

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 0 & 4 \\ s^4 & 1 & 0 & 4 \\ s^3 & 4 & 0 & b \text{ 行} \\ s^2 & \epsilon & 4 & c \text{ 行} \\ s^1 & -16/\epsilon & & d \text{ 行} \\ s^0 & 4 & & e \text{ 行} \end{array}$$

在着手计算  $b$  行中, 发现全部项目都是零, 预示特殊情况二。特征方程具有对称于  $s$  平面原点的根。返回  $s^4$  行, 编制由  $s^4$  起始递降  $s$  方次的辅助多项式

$$A(s) = 1s^4 + 0s^2 + 4s^0 \quad \frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 0s^1$$

将  $dA/ds$  的系数放入  $b$  行并按正常步骤继续:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = 0 \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = 4$$

以  $\epsilon$  替换  $c_1$  (特殊情况一)。

$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ \epsilon & 4 \end{vmatrix}}{\epsilon} = -\frac{16}{\epsilon} \quad e_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \epsilon & 4 \\ -16/\epsilon & 0 \end{vmatrix}}{-16/\epsilon} = 4$$


令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 并观察到在阵列的第一列中出现两次符号改变, 表示有两个右半  $s$  平面根。

关于这个特殊情况, 辅助方程  $A(s) = 0$  是四阶的, 意味着有两对根对称于  $s$  平面原点。如果分解  $A(s)$  的因式, 就求出这些根是  $-1 \pm j1$  和  $+1 \pm j1$ , 对称的每对根确定正方形的一条对角线。

**17.9** 一个控制系统的特征方程含有参数  $K$ :

$$D(s) = 2s^3 + 6s^2 + 6s + (K + 1) = 0$$

试确定使系统为稳定时  $K$  的范围。

 建立劳斯阵列, 在放入前将  $s^3$  行的系数乘以  $1/2$ 。

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 6 & K+1 & \\ s^1 & 17-K & & b \text{ 行} \\ s^0 & K+1 & & c \text{ 行} \end{array} \quad b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & K+1 \end{vmatrix}}{6} = 17-K$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 6 & K+1 \\ 17-K & 0 \end{vmatrix}}{17-K} = K+1$$

当且仅当  $-1 < K < 17$  时, 第一列中将不存在符号改变, 于是系统将是稳定的。

**17.10** 一个控制系统具有其传递函数

$$F(s) = \frac{N(s)}{As^3 + Bs^2 + Cs + D} \quad (A > 0)$$

试求出为了确保特征方程仅有左半  $s$  平面根, 对于其中系数的最少条件。

构成劳斯阵列:

$$\begin{array}{c|cc} s^1 & A & C \\ s^2 & B & D \\ s^1 & \frac{BC-AD}{B} & \\ s^0 & D & \end{array}$$

其中以通常方法算出了  $b_1$  和  $c_1$ 。随着给定了正的  $A$ , 当且仅当  $B > 0, D > 0$  和

$$BC - AD > 0 \text{ 即 } C > AD/B$$

时, 第一列中将没有符号改变。除了这三个之外, 任何进一步的约束将是多余的。

- 17.11 改变图 17-2(a) 方框图中单位反馈路径的符号。(只要  $\tau$  是正的, 目前的系统就是稳定的。)(a) 如果发生微小的脉冲干扰——比如  $r(t) = 10^{-10} \delta(t)$ ——试求当  $t \rightarrow \infty$  时  $c(t)$  的值。(b) 将(a)部分与实际控制系统相联系。(c) 如果图 17-2(a) 的方框图已表示串联 RC 滤波器网络, 以输入电压为  $r(t)$ , 以电容输出电压为  $c(t)$ , 可以实际上实行反馈回路上的符号改变吗?

(a) 实现符号的改变,

$$C(s) = \frac{1}{\tau s - 1} R(s) = \frac{1}{\tau s - 1} 10^{-10}$$

或

$$c(t) = 10^{-10} e^{+t/T} \quad (t \geq 0)$$

对于这个用正反馈使其变为不稳定的系统, 即使指令是可忽略地小而且早已消失, 当  $t \rightarrow \infty$  时仍是  $c(t) \rightarrow \infty$ 。

(b) 依据具有正反馈系统的接法, 常常观察到被控变量的剧烈振荡或极端的极限值。虽然指令可能还没有“正式地”施加, 而干扰几乎总是要出现, 激发出不稳定的响应。

(c) 如果系统是描述 RC 滤波器网络的, 反的符号将意味着负值的  $R$  或  $C$ 。不存在负值的无源元件, 因此不能实际上实行符号改变。但是对于简单有源积分器, 能够综合出正的符号。

- 17.12 对于简单二阶系统, (a) 如果  $0 \leq \zeta \leq 1$ , 试证明特征根位于复平面第二象限和第三象限中半径为  $\omega_n$  的四分之一圆周上。(b) 如  $\zeta$  增大到超过 1, 根的轨迹是什么?

(a) 由  $D(s)$ , 如式(17.6)中所给出的,

$$s_1 + s_2 = -2\zeta\omega_n \quad s_1 s_2 = \omega_n^2$$

这里由于  $s_1$  和  $s_2$  是共轭复数, 意味着

$$\operatorname{Re}(s_1) = \operatorname{Re}(s_2) = -\zeta\omega_n \leq 0$$

$$|s_1| = |s_2| = \omega_n$$

这些关系式解释了确定的四分之一圆周。见图 17-9。

(b) 当  $\zeta = 1$  时, 由(a)看出两个特征根都位于  $s = -\omega_n$  (即二重根)。如  $\zeta$  增大, 则根保持为实数, 一个朝着原点向右移动而另一个朝着  $-\infty$  向左移动, 见图 17-9。

- 17.13 由例 17.7 和图 17-5, 注意到如果  $0 < \zeta < 1$ , 简单二阶系统对于单位阶跃输入的响应要超过终极或稳态值。试求(a)达到峰值过冲的时间( $t_p$ )表达式, (b)在瞬态期间  $c(t)$  的最大值  $c(t_p) \equiv C_p$  表达式。

(a) 希望确定  $c(t)$  的第一个最大值位置。对例 17.7 的(2)取导数,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [-\zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \varphi) + \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi)] = 0$$

或由于  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  和  $\zeta = \cos \varphi$ ,

$$\tan(\omega_d t + \varphi) = \tan \varphi \quad (1)$$

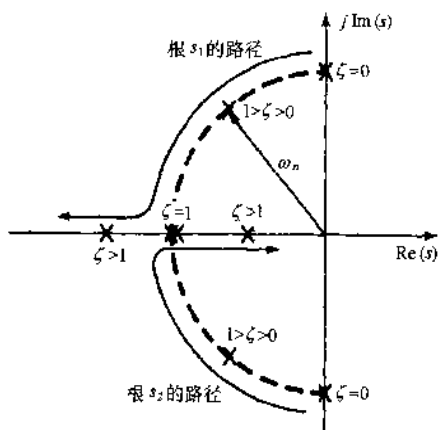


图 17-9



正切函数具有周期  $\pi$ , 所以(1)的最小正根为

$$\omega_d t_p = \pi \quad \text{即} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad C_p = c(t_p) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} \sin(\pi + \varphi) \\ &= 1 - \frac{1}{\sin \varphi} e^{-\varphi / \sqrt{1-\zeta^2}} (-\sin \varphi) \\ &= 1 + e^{-\varphi / \sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

**17.14** 利用题 17.13(b)中所求出的  $C_p$  表达式, (a)导出归一化峰值过冲的表达式, (b)画出它对于  $0 < \zeta < 1$  的曲线。

解 (a) 由例 17.7 的(2),  $c(t)$  的稳态值是  $c_{ss} = 1$ 。于是,

$$\text{归一化峰值过冲} = \frac{C_p - c_{ss}}{c_{ss}} = e^{-\varphi / \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1)$$

(b) 见图 17-10。注意当  $0.85 < \zeta < 1$  时, 过冲低于 1% 从而是可忽略的。

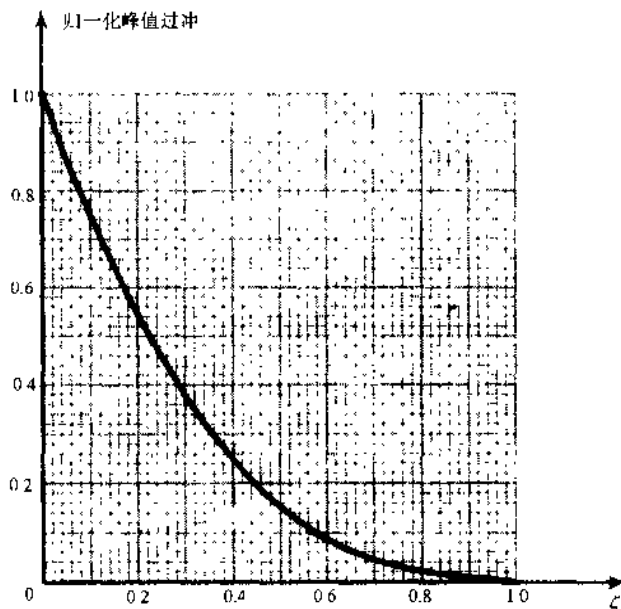


图 17-10

**17.15** 速率反馈有时用于减小二阶控制系统的过冲(增大阻尼比)。图 17-11 的系统是一个转速控制系统, 具有经由  $K_t$  的转速计反馈。输出(被控转速)的导数按比例变换, 并由  $sK_r$  反馈。(a) 试求出特征方程, 并导出归因于增添速率反馈使阻尼比百分数增加的公式。(b) 如果  $K_1 = 9$ ,  $\tau = 0.8333$ ,  $K_t = 1$ , 计算当  $K_r = 0$  和  $K_r = 0.4$  时响应的百分数过冲。

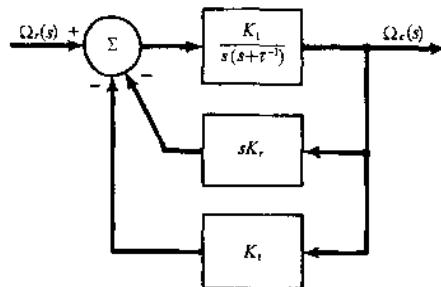


图 17-11

解 (a) 由方框图代数,

$$\frac{\Omega_c(s)}{\Omega_r(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (\tau^{-1} + K_r K_1)s + K_1 K_t} \quad (1)$$

比较(1)与式(17.6), 看出

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{K_1 K_t} \\ \zeta &= \frac{\tau^{-1} + K_r K_1}{2 \sqrt{K_1 K_t}} = \frac{\tau^{-1} + K_r K_1}{2 \sqrt{K_1 K_t}} \quad (2) \end{aligned}$$

所要的公式是

$$\zeta \text{ 的 } \% \text{ 增加} = \frac{(\tau^{-1} + K_r K_1) - \tau^{-1}}{\tau^{-1}} \times 100\% = 100\tau K_r K_1 \quad (3)$$

(b) 由数据,  $\omega_n = \sqrt{9 \times 1} = 3 \text{ rad/s}$ 。如果  $K_r = 0$ , (2) 给出

$$\zeta = \frac{1}{2\tau\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.8333 \times 3} = 0.2$$

由图 17-10, 当  $\zeta = 0.2$  时, 归一化峰值过冲 = 0.53, 而

$$\% \text{ 峰值过冲} = \text{归一化峰值过冲} \times 100\% = 53\%$$

如果  $K_r = 0.4$ , 由 (2) 给出

$$\zeta = \frac{(0.8333)^{-1} + 0.4 \times 9}{2 \times 3} = 0.8$$

考虑图 17-10, 在  $\zeta = 0.8$  时给出归一化峰值过冲 = 0.015, 这样

$$\% \text{ 峰值过冲} = \text{归一化峰值过冲} \times 100\% = 1.5\%$$

在减小过冲方面, 速率反馈的效用无疑是明显的。

**17.16** 关于图 17-12 的控制系统, 如果  $q(t) \equiv 0$ ,  $r(t) = 10u(t) - 5t$ , 试求在  $t = 2\text{s}$  时的误差。

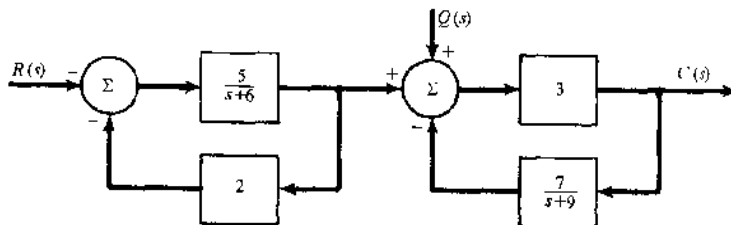


图 17-12

由方框图代数求出拉普拉斯响应是

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{15(s+9)}{(s+16)(s+30)} R(s) = \frac{15(s+9)}{(s+16)(s+30)} \left( \frac{10s-5}{s^2} \right) \\ &= \frac{75(s+9)(2s-1)}{s^2(s+16)(s+30)} \end{aligned} \quad (1)$$

$D(s) = 0$  的根是  $-16$  和  $-30$ , 因此系统是稳定的, 但  $r(t)$  是无界的。因为两个瞬态模式的时间常数  $[(1/16)\text{s} \text{ 和 } (1/30)\text{s}]$  与  $2\text{s}$  相比是很小的, 所以求出稳态误差并计算它在  $t = 2\text{s}$  的值是足够的。

(1) 的部分分式表达式给出

$$C(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \text{瞬态项} \quad (2)$$

并由通常方法求出  $A = -1.4063$  和  $B = 2.791$ 。由 (2) 的反变换得出稳态响应:

$$c_{ss}(t) = 2.791 - 1.4063t$$

于是稳态误差为

$$e_{ss}(t) = r(t) - c_{ss}(t) = (10 - 5t) - (2.791 - 1.4063t) = 7.209 - 3.594t$$

而  $e_{ss}(2) = 0.0216$ 。

**17.17** 用具有  $G_1(s) = 1/(s+3)$ ,  $G_2(s) = 1/s$ ,  $H(s) = 1$  的图 17-7(b) 方框图描述了一个稳定的控制系统。(a) 系统型数是什么? 当为 (b) 阶跃输入  $Ku(t)$ ; (c) 斜坡输入  $Kt$ ; (d) 抛物线输入  $Kt^2$  时, 试预计稳态误差。

(a) 将这个系统变成图 17-6(c) 的单位反馈形式,

$$G_x(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s\left(\frac{1}{3}s + 1\right)} \quad (1)$$

将 (1) 与式 (17.10) 比较, 显然  $n = 1$ , 即系统是 1 型的。

(b) 由于  $k_n = 1/3$ , 式 (17.16) 给出

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{1}{3}}{s} \right] = \infty$$

按  $R(s) = K/s$  用换算的式(17.15)求出稳态误差:

$$e_{ss} = \frac{K}{1+K_p} = \frac{K}{1+\infty} = 0$$

(c)由式(17.18),

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{3}$$

按  $R(s) = K/s^2$ , 换算后的式(17.17)给出

$$e_{ss} = \frac{K}{K_v} = \frac{K}{\frac{1}{3}} = 3K$$

(d)由式(17.20),

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s^2} \right] = 0$$

按  $R(s) = 2K/s^3$ , 换算后的式(17.19)得出

$$e_{ss} = \frac{2K}{K_a} = \frac{2K}{0} = \infty$$

**17.18** 关于图 17-6(a)标准形式的控制系统,

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)} \quad H(s) = 1$$

试利用表 17-1 来预计对于  $r(t) = 6u(t) + 4t$  的稳态误差。

容易证明这个系统是稳定的。因  $H(s) = 1$ ,

$$G_u(s) = G_1(s) = \frac{10}{s(s+10)} = \frac{1}{s(0.1s+1)} \quad (1)$$

将(1)与式(17.10)比较,看出这是  $K_u = 1$  的 1 型系统。必须注意表 17-1 是对于式(17.11)、(17.12)及(17.13)所描述的指令导出的,这就必须适当地变换表列误差的比例。另外,对于线性系统,叠加定理使得能够按归因于  $r(t)$  每个分量各自作用下的误差之和求出总的误差。因此,

$$e_{ss} = 6e_{ss1} + 4e_{ss2} = 6 \times 0 + 4(1/K_u) = 4$$

式中  $e_{ss1}$  和  $e_{ss2}$  分别是按表 17-1 中所给 1 型系统对于阶跃输入和斜坡输入的误差。

**17.19** 可以用具有  $r(t) = R_0 t$  和  $q(t) = Q_0 u(t)$  的图 17-12 模拟一个控制系统。试求出稳态误差  $e_{ss}(t)$  的表达式。

在题 17.16 中证明了这个系统是稳定的。利用方框图化简,归因于  $r(t)$  的拉普拉斯响应仅是

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{15(s+9)}{(s+16)(s+30)} R(s) = \frac{15(s+9)}{(s+16)(s+30)} \frac{R_0}{s^2} = \frac{15R_0(s+9)}{s^2(s+16)(s+30)} \\ &= \frac{0.2183R_0}{s^2} + \frac{0.0043R_0}{s} + \text{瞬态项} \end{aligned}$$

反变换,

$$c_{ss}(t) = 0.0043R_0 + 0.2183R_0 t$$

通过方框图代数求出归因于  $q(t)$  的响应:

$$C_d(s) = \frac{3(s+9)}{s+30} Q(s) = \frac{3(s+9)}{s+30} \frac{Q_0}{s} = \frac{0.9Q_0}{s} + \text{瞬态项}$$

由此  $c_{ds}(t) = 0.9Q_0$ 。于是按例 17.8 中同样推理,有稳态误差:

$$e_{ss}(t) = r(t) - c_{ss}(t) + c_{ds}(t) = 0.7187R_0 t - 0.0043R_0 + 0.9Q_0$$

**17.20** 关于具有图 17-7(a)所给方框图的系统,如果(a)  $H(s) = 1$ ,  $G_1(s) = K_1/s$ ,  $G_2(s) = K_2/(s+1)$ ; (b)  $H(s) = 1$ ,  $G_1(s) = K_1$ ,  $G_2(s) = K_2/s(s+1)$ 。 ( $K_1 K_2 > 1/4$ ) 当干扰输入  $q(t) = Q_0 u(t)$  时,试求稳态干扰输出(干扰误差)  $c_{ds}$ 。(c)在(a)和(b)中,就  $R(s)$  而论的正向传递函数是相同的,试解说从干扰输入来看的这些函数的不同。

(a)由题 17.1(用  $G_1 G_2$  替换  $G$  时),特征根是方程

$$1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 0$$

或

$$s^2 + s + K_1K_2 = 0$$

的根。在  $K_1K_2 > 1/4$  的假定之下, 两个根都具有实部  $-1/2$ , 所以这个系统是稳定的。由例 17.8 的 (1),

$$C_d(s) = \frac{\left(\frac{K_2}{s+1}\right)\left(\frac{Q_0}{s}\right)}{1 + \left(\frac{K_1}{s}\right)\left(\frac{K_2}{s+1}\right)} = \frac{K_2Q_0}{s^2 + s + K_1K_2}$$

终值定理给出

$$c_{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} s C_d(s) = 0$$

不存在归因于干扰的稳态误差。

(b) 特征根与 (a) 系统中的相同。

$$C_d(s) = \frac{\left[\frac{K_2}{s(s+1)}\right]\left(\frac{Q_0}{s}\right)}{1 + K_1\left[\frac{K_2}{s(s+1)}\right]} = \frac{K_2Q_0}{s(s^2 + s + K_1K_2)}$$

$$c_{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} s C_d(s) = \frac{Q_0}{K_1}$$

即存在恒定的稳态干扰误差。

(c) 在 (a) 中, 由干扰看到在反馈路径中有积分器; 而在 (b) 中, 就干扰输入而论, 积分器呈现在正向路径中。然而在两种情况下, 积分器在指令信号正向路径中起到了延迟系统响应的作用。见题 17.21 减少干扰误差的更好方法。

- 17.21** 为了在增大瞬态衰减时间的损失下减小稳态干扰误差, 在题 17.20 中导出了积分控制。比例加积分控制可以用于减小稳态误差而提供容许的瞬态衰减时间。举例, 在图 17-7(a) 中令  $H(s) = 1$ ,  $G_1(s) = K_3 + (K_1/s)$ ,  $G_2(s) = K_2/(s+1)$ ; 假定

$$K_1K_2 > 0 \text{ 和 } \sqrt{4K_1K_2} > K_2K_3 + 1 > 0 \quad (1)$$

(a) 已知  $Q(s) = Q_0/2$ , 试求稳态干扰响应  $c_{ds}$ , 并与题 17.20(a) 比较。(b) 将这个题的各衰减瞬态项时间常数与题 17.20 的进行比较。

解 (a) 像题 17.20(a) 中一样, 求出由特征根所满足的二次方程:

$$s^2 + (K_2K_3 + 1)s + K_1K_2 = 0$$

在关于系数的假定 (1) 之下, 两个根都在左半  $s$  平面内而系统是稳定的——实际上像题 17.20(a) 和 (b) 的系统一样, 它是欠阻尼的。由例 17.8 的 (1),

$$C_d(s) = \frac{\left(\frac{K_2}{s+1}\right)\left(\frac{Q_0}{s}\right)}{1 + \left(K_3 + \frac{K_1}{s}\right)\left(\frac{K_2}{s+1}\right)} = \frac{K_2Q_0}{s^2 + (K_2K_3 + 1)s + K_1K_2}$$

$$c_{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} s C_d(s) = 0$$

归因于阶跃干扰的稳态误差是零, 这与题 17.20(a) 的结果一样。

(b) 题 17.20 特征方程的根是  $s_{1,2} = -(1/2) \pm j\omega_d$ , 而时间常数是  $\tau = 2$ 。对于现在的题,

$$s_{1,2} = -\frac{K_2K_3 + 1}{2} \pm j\omega_d \quad \text{所以 } \tau = \frac{2}{K_2K_3 + 1}$$

不违背 (1) 而可以将  $K_2K_3 + 1$  选取得足够大, 来减小时间常数达到任一容许值。在题 17.20 中不存在这样的灵活性。

- 17.22** 已知三个  $s$  域的量  $A(s)$ 、 $B(s)$ 、 $C(s)$ , 使  $A(s)$  与  $C(s)$  由传递函数联系起来,

$$A(s) = F(s)C(s)$$

并使  $C(s)$  不受  $B(s)$  变化的影响。试证明

$$S_B^A = S_B^F$$

解 由式 (17.21)

$$S_B^A = S_B^{FC} = \frac{B}{FC} \frac{d}{dB} (FC) = \frac{B}{FC} C \frac{dF}{dB} = \frac{B}{F} \frac{dF}{dB} = S_B^F$$

- 17.23 图 17-13 的两个定位控制系统是在  $\tau = 1, A = 3, \theta_c(t) = 10u(t)$  下实验室检测并认定的稳态完全跟踪。当置于极端低温的场地服务时,两个系统的放大器增益都增加到  $A = 3.333$ ,其余全未改变。试利用静态灵敏度函数预计每个系统在场服务中的输出高于在实验室中所观测到的输出其百分数改变。

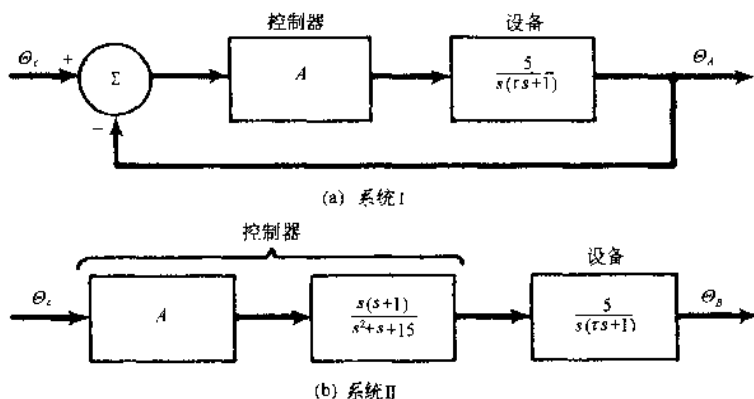


图 17-13

关于  $\tau = 1$  的系统 I, 传递函数是

$$F_I(s) = \frac{5A}{s^2 + s + 5A}$$

利用式(17.21)和题 17.22 构成静态灵敏度函数。

$$\begin{aligned} S_{A^I}^{F_I(s)} \Big|_{s=0} &= S_{A^I}^{F_I(s)} \Big|_{s=0} = \frac{A}{F_I(s)} \frac{dF_I(s)}{dA} \Big|_{s=0} \\ &= \left\{ \frac{s^2 + s + 5A}{5} \frac{d}{dA} \left[ \frac{5A}{s^2 + s + 5A} \right] \right\} \Big|_{s=0} = 0 \end{aligned}$$

而

$$\frac{\Delta \theta_A}{\theta_A} \Big|_{s=0} = S_{A^I}^{F_I(s)} \Big|_{s=0} \left( \frac{\Delta A}{A} \right) = 0\%$$

系统 II 的传递函数给自

$$F_{II}(s) = \frac{5A}{s^2 + s + 15}$$

由此式,

$$S_{A^{II}}^{F_{II}(s)} \Big|_{s=0} = S_{A^{II}}^{F_{II}(s)} \Big|_{s=0} = \left\{ \frac{s^2 + s + 15}{5} \frac{d}{dA} \left[ \frac{5A}{s^2 + s + 15} \right] \right\} \Big|_{s=0} = 1$$

而

$$\frac{\Delta \theta_B}{\theta_B} \Big|_{s=0} = S_{A^{II}}^{F_{II}(s)} \Big|_{s=0} \left( \frac{\Delta A}{A} \right) = 1 \left( \frac{3.333 - 3}{3} \right) = 11.1\%$$

- 17.24 对于图 17-6(a)的标准系统, (a)推导输出对于反馈路径  $H(s)$  改变时的灵敏度公式。 (b)应用这个公式至  $A = 3$  的图 17-13(a)系统, 以求出静态灵敏度。解释这个结果。

(a) 利用题 17.22,

$$S_{H(s)}^{C(s)} = S_{H(s)}^{F(s)} = \frac{H(s)}{F(s)} \frac{dF(s)}{dH(s)} = \left[ \frac{H(s)}{\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}} \right] \frac{d}{dH(s)} \left[ \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right]$$

在进行了所表示的取导数和简化之后, 求出:

$$S_{H(s)}^{C(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1)$$

(b) 关于图 17-13(a)的系统, 有  $A = 3, H(s) = 1, G(s) = 15/s(s+1)$ 。静态灵敏度是将  $G(s)$  和  $H(s)$  的表达式代入(1)中并在  $s = 0$  时计算得出结果。

$$S_{H(s)}^{C(s)} \Big|_{s=0} = \left[ \frac{-15}{s(s+1) + 15} \right] \Big|_{s=0} = -1$$

这个结果表示输出减小的百分数与  $H$  增大的百分数相同, 倒过来也是。

## 补充习题

- 17.25 断定了例 17.4 的五次特征方程有两个右半  $s$  平面根。如果已知在左半  $s$  平面内的根是  $s_1 = -1$  和  $s_{2,3} = -1 \pm j1$ , 试求引起系统不稳定的那两个根。

答  $+1 \pm j2$

- 17.26 下面给出了四个不稳定(或临界稳定)系统的已因式分解特征多项式。试说明每个特征多项式是能够通过还是不能通过稳定性的必要检验。

$$(a) (s-1)(s+2)(s+3) \quad (c) (s+j2)(s-j2)(s+2)$$

$$(b) (s-1)(s-2)(s+3) \quad (d) (s-1-j5)(s-1+j5)(s+6)$$

答 (a) 具有一个负系数, 检验失败; (b) 具有一个负系数和一个零系数, 检验失败; (c) 检验通过; (d) 检验通过

- 17.27 试对于

$$D(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240 = 0$$

应用劳斯-赫尔维茨判据。

答 不稳定, 具有两个在右半  $s$  平面内的根。(各个根是  $-3, -1 \pm j\sqrt{3}, +2 \pm j4$ 。)

- 17.28 试对于

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18 = 0$$

应用劳斯-赫尔维茨判据。

答 不稳定。没有右半  $s$  平面根, 但辅助方程的根在  $\pm j3$  处。

- 17.29 如果图 17-6(a)控制系统的

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)} \quad H(s) = 1$$

试求能使稳定工作之下  $K$  的范围。

答  $0 < K < 1$

- 17.30 如果题 17.29 的  $H(s) = s + 1$  (速率反馈), 试重做该题。

答  $K > 0$

- 17.31 一个图 17-6(c)形式控制系统的

$$G_e(s) = \frac{4(s+1)}{s^2(\tau s + 1)}$$

如果时间常数  $\tau$  太大, 这个系统能够成为不稳定的吗? 若是如此, 试求当为绝对稳定性之下  $\tau$  的范围。

答 是的,  $0 \leq \tau < 1$

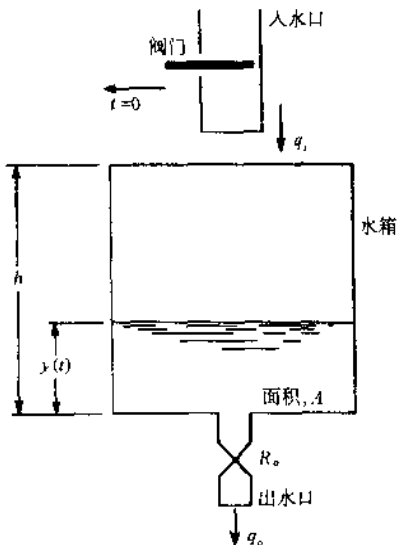


图 17-14

- 17.32 在图 17-14 中示出了一个初始净空的水箱 [ $y(0) = 0$ ], 水箱具有恒定的横截面积  $A = 2\text{m}^2$ 。水 ( $\gamma = 9800\text{N/m}^3$ ) 可以通过具有液阻 [见 (15.7)]  $R_o = 0.49\text{MPa} \cdot \text{s/m}^3$  的底部出水口排出。在  $t = 0$  时开启阀门注入  $q_i = 0.04\text{m}^3/\text{s}$  的恒定输入流量。(a) 把液体平面当作被控变量, 假定  $h$  很大, 试求  $t \geq 0$  时的  $y(t)$ 。(b) 如果  $h = 1\text{m}$ , 水箱会溢出吗? 若是如此, 将在何时溢出?

答 (a)  $y(t) = 2(1 - e^{-0.01t})$  (m); (b) 当  $t > 69.3\text{s}$  时溢出

- 17.33 如果由式 (17.6) 和 (a)  $\zeta = 1$ , (b)  $0 < \zeta < 1$  和 (c)  $\zeta > 1$  给出传递函数, 试求  $t \geq 0$  时简单二阶系统对于图 17-1(c) 中冲激的响应。(d) 由以上结果, 能够做出关于绝对稳定系统冲激响应的什么总结?

答 (a)  $c(t) = K\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$ ; (b)  $c(t) = K\omega_n (1 - \zeta^2) e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t$ ; (c)  $c(t) = [K\omega_n^2 / (\beta_2 - \beta_1)] (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t})$ , 式中  $\beta_{1,2} = -\omega_n (1 \mp \sqrt{\zeta^2 - 1})$ ; (d) 随着  $t \rightarrow \infty$  而冲激响应趋近于零。

- 17.34 将输入电压  $v_1(t)$  施加至串联  $RLC$  电路两端, 并取电容两端的电压  $v_2(t)$  作为输出, 就构成了一个简单二阶系统。(a) 试证明传递函数  $F(s) \equiv V_2(s)/V_1(s)$  是式 (17.6) 的形式。(b) 试求出这个电路的  $\zeta$  和  $\omega_n$ 。

答 (a)  $F(s) = \frac{(1/LC)}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$ ; (b)  $\omega_n = \sqrt{1/LC}$ ,  $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{C/L}$

- 17.35 一个简单二阶系统具有在  $t = 0.02s$  时达到的归一化峰值过冲 0.6。试利用图 17-10 和题 17.13(a) 求出特征方程。

答  $\zeta = 0.16$ ,  $\omega_n = 159.13 \text{ rad/s}$ ;  $s^2 + 50.92s + 25313 = 0$

- 17.36 图 17-15 的弹簧质量缓冲器构成简单二阶系统, 由力  $f(t)$  定位操作以使  $t \geq 0$  时  $x_r(t) = Kt$  (m)。如果  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $\beta = 20 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ,  $k = 50 \text{ N/m}$ , 假定全部初始条件都是零, 试求被控变量  $x_c(t)$  的表达式。

答  $x_c(t) = K(t - 0.4) + K(t + 0.4)e^{-5t}$  (m) ( $t \geq 0$ )

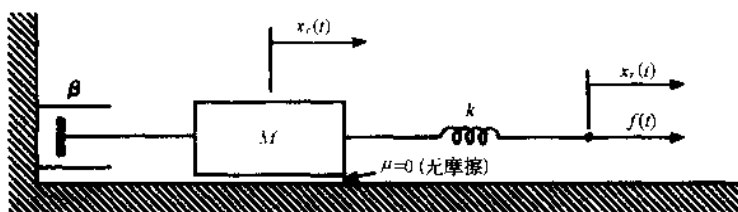


图 17-15

- 17.37 (a) 试由例 17.6(a) 的结果导出具有图 17-1(b) 输入的简单一阶系统误差的表达式。(b) 试求出在  $t = 5\tau$  时误差与在  $t \rightarrow \infty$  时误差之间的百分数差别。

答 (a)  $e(t) = K\tau(1 - e^{-t/\tau})$  ( $t \geq 0$ ); (b) 0.674%

- 17.38 题 17.20 提供了一种减小稳态干扰误差的方法, 但是增大了瞬态项消失的时间。就此举例, 如果 (a)  $H(s) = 1$ ,  $G_1(s) = 1$ ,  $G_2(s) = 2/(s+1)$ , 没有正向路径积分器; (b)  $H(s) = 1$ ,  $G_1(s) = 1/s$ ,  $G_2(s) = 2/(s+1)$ , 包含一个正向路径积分器, 试求由图 17-7(a) 方框图所描述系统的瞬态响应。

答 (a)  $c_u(t) = Ae^{-3t}$  ( $t \geq 0$ ); (b)  $c_u(t) = Be^{-0.2t} \cos(\sqrt{7}t/2)$  ( $t \geq 0$ )

- 17.39 对于具有

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s+10)} \quad H(s) = 3s^2 + 1$$

的图 17-6(a) 标准形式系统, 试预计对于指令  $r(t) = 6t^2 u(t)$  的稳态误差。

答  $e_{\text{ss}} = 12$

- 17.40 按图 17-16 定义在阶跃输入下欠阻尼简单二阶系统的稳定时间 ( $t_s$ )。试证明  $t_s < 3/\zeta\omega_n$ 。

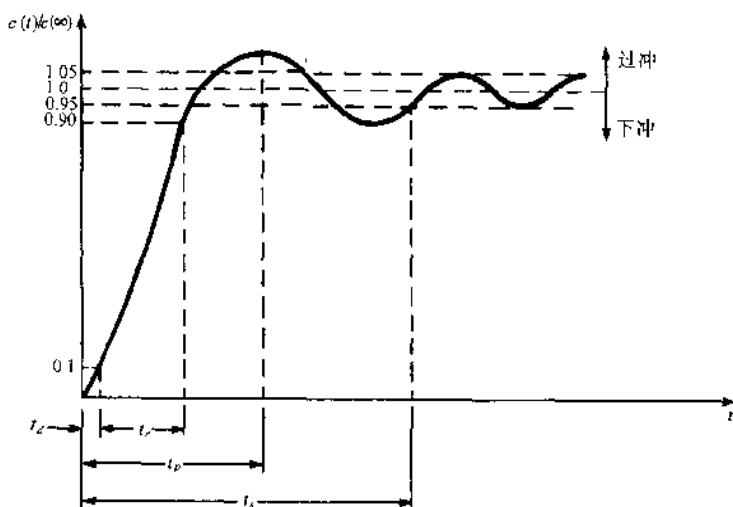


图 17-16

17.41 如果图 17-12 中控制系统的  $r(t) = R_0 u(t)$ ,  $q(t) = Q_0 u(t)$ , 试求稳态误差。

答  $e_{ss} = 0.7188R_0 + 0.9Q_0$

17.42 由图 17-7(a) 的方框图模拟了一个具有干扰的转速控制系统。令  $G_1(s) = K$  (比例控制器),  $Q(s)$  是表现为  $+20\text{N}\cdot\text{m}$  的恒定干扰转矩, 设备  $G_2(s) = 1/(Js + \beta)$  是  $J = 15\text{kg}\cdot\text{m}^2$  和  $\beta = 8\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$  的电动机。试求控制器增益  $K$ , 要使归因于干扰转矩的稳态转速误差不大于  $2\text{rad/s}$ 。

答  $K \geq 2$

17.43 图 17-17 的方框图举出了利用前馈控制以减少干扰作用的例子。当干扰  $Q(s)$  进入设备时测定它(这可能是困难的); 靠一个干扰控制器工作; 然后特意将其与相反极性的动作误差信号  $E(s)$  合并。试由研究设备误差信号  $E_p(s)$ , 预计能使干扰作用减至最小时干扰控制器的形式。

答  $G_d(s) = 1/G_i(s)$

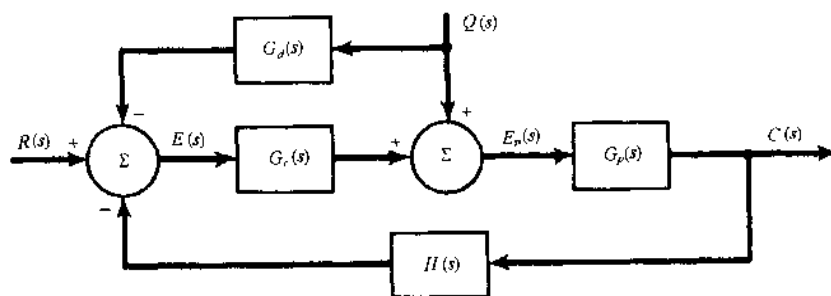


图 17-17

17.44 对于图 17-13 的两个系统, 当设备(电动机)时间常数由  $\tau = 1$  变成  $\tau = 1.2$  时, 试利用灵敏度函数预计稳态响应的改变。令  $\theta_c(t) = 10u(t)$  和  $A = 3$ 。

答 两个系统都是 0%

17.45 不利用灵敏度函数而代之以计算在增益参数原值和新值下的稳态输出来求解题 17.23。

答 系统 I 为 0% 改变, 系统 II 为 11.1% 改变。

17.46 由图 17-7(a) 模拟了一个具有干扰的控制系统。试求出干扰输出  $C_d(s)$  对于设备  $G_2(s)$  改变时的灵敏度。

答  $1/[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]$

17.47 如果  $\theta_c(t) = A \sin \omega t$ , 式中  $\omega = 1\text{rad/s}$ , 试求解题 17.44。利用强制频率下的动态灵敏度。

答  $\frac{\Delta \theta_A}{\theta_A} = 0.014 \angle -4.08^\circ$ ,  $\frac{\Delta \theta_B}{\theta_B} = 0.1414 \angle -135^\circ$